ACTUALITÉS SCIENTIFIQUES ET INDUSTRIELLES

643

EXPOSÉS DE GÉOMÉTRIE

Publiés sous la direction de

M. E. CARTAN

Membre de l'Institut
Professeur à la Sorbonne

IX

LEÇONS SUR LA THÉORIE DES SPINEURS

I

LES SPINEURS DE L'ESPACE A TROIS DIMENSIONS

PAR

ÉLIE CARTAN

D'après des notes recueillies et rédigées

PAR

ANDRÉ MERCIER

Docteur ès Sciences

PARIS

HERMANN & C^ie ÉDITEURS

6, Rue de la Sorbonne, 6

1938

B. S. Mhavarkar

ACTUALITÉS SCIENTIFIQUES ET INDUSTRIELLES

643

EXPOSÉS DE GÉOMÉTRIE

Publiés sous la direction de

M. E. CARTAN

Membre de l'Institut
Professeur à la Sorbonne

IX

LEÇONS SUR LA THÉORIE DES SPINEURS

I

LES SPINEURS DE L'ESPACE A TROIS DIMENSIONS

PAR

ÉLIE CARTAN

D'après des notes recueillies et rédigées

PAR

ANDRÉ MERCIER

Docteur ès Sciences

PARIS

HERMANN & C^ie^, ÉDITEURS

6, Rue de la Sorbonne, 6

—

1938

INTRODUCTION

Ce sont les physiciens qui ont introduit en Mécanique quantique ce qu'on appelle maintenant les *spineurs.* Sous leur forme mathématique la plus générale, les spineurs ont été découverts par l'auteur de cet Ouvrage en 1913 dans ses recherches sur les représentations linéaires des groupes simples (1), ils fournissent une représentation linéaire du groupe des rotations d'un espace à un nombre quelconque n de dimensions, chaque spineur ayant 2^ν composantes suivant que $n = 2\nu + 1$ ou 2ν. Les spineurs de l'espace à quatre dimensions figurent dans les célèbres équations de l'électron de Dirac, les quatre fonctions d'onde n'étant autres que les composantes d'un spineur. De très nombreux mémoires ont été publiés sur les spineurs en général. MM. Hermann Weyl et Richard Brauer ont publié récemment un beau mémoire (2), qu'on peut considérer comme fondamental, bien que plusieurs des résultats obtenus soient très brièvement indiqués dans le mémoire auquel il est fait allusion plus haut. M. O. Veblen a fait, à un autre point de vue, une étude très intéressante des spineurs dans un cours non publié à l'Université de Princeton. Mais dans presque tous ces travaux les spineurs sont introduits d'une manière purement formelle sans signification géométrique intuitive ; c'est d'ailleurs cette absence de sens géométrique qui a rendu si compliquées les tentatives pour étendre à la relativité générale les équations de Dirac.

L'un des buts principaux de cet Ouvrage est de développer systématiquement la théorie des spineurs en donnant de ces êtres mathématiques une définition purement géométrique : grâce à

(1) E. Cartan, *Les groupes projectifs qui ne laissent invariante aucune multiplicité plane* (Bull. Soc. Math. de France, 41, 1913, p. 53-96).

(2) R. Br.'uer and H. Weyl, *Spinors in n dimensions* (Amer. J. of. Math., 57, 1935, p. 425-449).

cette origine géométrique, les matrices qu'utilisent les physiciens en Mécanique quantique se présentent d'elles-mêmes et on saisit l'origine profonde de la propriété que possèdent les nombres hypercomplexes de Clifford-Lipschitz de représenter les rotations dans un espace à un nombre quelconque de dimensions. Enfin cette origine géométrique rend très facile l'introduction des spineurs en géométrie riemannienne et spécialement l'application à ces êtres géométriques de la notion de transport parallèle. On s'explique aussi les difficultés qui ont été rencontrées à ce sujet, difficultés qui sont *insurmontables* si l'on veut utiliser la technique classique de la géométrie riemanienne. Cette technique s'applique aux vecteurs et aux tenseurs ordinaires, qui, à côté de leur caractère *métrique*, ont un caractère purement affine, mais elle ne peut s'appliquer aux spineurs qui ont un caractère métrique, mais n'ont pas le caractère affine.

Ces Leçons se divisent en deux Parties. La première est consacrée à des généralités sur le groupe des rotations de l'espace à n dimensions et sur les représentations linéaires des groupes, à la théorie des spineurs de l'espace à 3 dimensions, ainsi qu'à la recherche des représentations linéaires du groupe des rotations de cet espace. On sait l'importance qu'ont ces représentations en Mécanique quantique ; la méthode utilisée pour leur détermination est la méthode infinitésimale, celle qui demande le moins de connaissances préliminaires pour être comprise ; on a complètement laissé de côté, malgré son grand intérêt, la méthode transcendante de M. H. Weyl fondée sur la théorie des caractères.

La seconde Partie est consacrée à la théorie des spineurs dans un espace à un nombre quelconque de dimensions, et spécialement dans l'espace de la relativité restreinte ; les représentations linéaires du groupe de Lorentz sont indiquées ainsi que la théorie des spineurs en géométrie riemannienne.

Cet Ouvrage, qui reproduit avec certaines modifications un cours professé à la Sorbonne pendant le semestre d'hiver 1935-1936, a été rédigé d'après des notes que M. André Mercier avait recueillies et dont il avait fait une première rédaction, largement utilisée par l'auteur, qui lui adresse ses vifs remerciements pour la collaboration qu'il lui a prêtée.

Elie Cartan.

I

LES SPINEURS DE L'ESPACE A TROIS DIMENSIONS. REPRÉSENTATIONS LINÉAIRES DU GROUPE DES ROTATIONS.

CHAPITRE I.

ESPACE EUCLIDIEN A n DIMENSIONS; ROTATIONS ET RETOURNEMENTS.

I. — ESPACE EUCLIDIEN.

1. Définition. Vecteurs. — On peut définir l'espace euclidien à n dimensions en appelant point l'ensemble de n nombres $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$, le carré de la distance d'un point (x) au *point origine* $(0, 0, \cdots, 0)$ étant donné par la *forme fondamentale*

(1) $$\mathrm{F} \equiv x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2;$$

cette forme représente aussi le carré scalaire ou le carré de la longueur du *vecteur* $\vec{x}$ issu du point origine et dont l'extrémité est le point (x) ; les n quantités x_i sont aussi appelées les *composantes* de ce vecteur. Les coordonnées x_i peuvent être des nombres complexes arbitraires, et on dit alors que l'espace euclidien est complexe ; mais elles peuvent aussi être réelles et on a alors l'espace euclidien réel. Il existe également dans le domaine réel des espaces *pseudo-euclidiens*, correspondant à une forme fondamentale réelle *indéfinie*

(2) $$\mathrm{F} \equiv x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x^2_{n-h} - x^2_{n-h+1} - \cdots - x_n^2;$$

nous supposerons, ce qui ne restreint pas la généralité, $n - h \geqslant h$.

On est amené dans les espaces réels à considérer des vecteurs dont les composantes ne sont pas toutes réelles : ils sont dits imaginaires.

Un vecteur est dit isotrope si son carré scalaire est nul, c'est-à-dire si ses composantes annulent la forme fondamentale. Dans l'espace complexe ou dans l'espace euclidien réel proprement dit, un vecteur est dit unitaire si son carré scalaire est égal à 1. Dans l'espace pseudo-euclidien réel à forme fondamentale indéfinie, on distingue les *vecteurs d'espace* réels qui rendent la forme fondamentale positive, des *vecteurs de temps* réels, qui la rendent négative ; un vecteur d'espace unitaire rend la forme fondamentale égale à $+1$, un vecteur de temps unitaire la rend égale à -1.

Si nous considérons deux vecteurs $\vec{x}$, $\vec{y}$, et le vecteur $\vec{x} + \lambda \vec{y}$, où λ est un paramètre donné, c'est-à-dire le vecteur de composantes $x_i + \lambda y_i$, le carré scalaire de ce vecteur est

$$\vec{x}^2 + \lambda^2 \vec{y}^2 + 2\lambda \vec{x} \cdot \vec{y},$$

en désignant par $\vec{x} \cdot \vec{y}$ la somme $x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n$. Cette somme est le *produit scalaire* des deux vecteurs ; dans le cas d'un espace pseudo-euclidien, le produit scalaire est

$$x_1 y_1 + \cdots + x_{n-h} y_{n-h} - x_{n-h+1} y_{n-h+1} - \cdots - x_n y_n.$$

Deux vecteurs sont dits rectangulaires ou perpendiculaires entre eux si leur produit scalaire est nul ; un vecteur isotrope est perpendiculaire à lui-même. Le lieu des vecteurs perpendiculaires à un vecteur donné est un hyperplan à $n-1$ dimensions (défini par une équation linéaire entre les coordonnées).

2. Repères cartésiens. — Les n vecteurs $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \cdots, \vec{e}_n$ qui ont toutes leurs composantes nulles sauf une égale à 1 constituent une *base*, en ce sens que tout vecteur $\vec{x}$ est une combinaison linéaire $x_1 \vec{e}_1 + x_2 \vec{e}_2 + \cdots + x_n \vec{e}_n$ de ces n vecteurs. Ces vecteurs de base sont rectangulaires deux à deux : ils contituent ce que nous appellerons un repère cartésien rectangulaire.

Plus généralement prenons n vecteurs $\vec{\eta}_1, \vec{\eta}_2, \cdots, \vec{\eta}_n$ linéairement indépendants, c'est-à-dire tels qu'il n'existe aucun système de nombres $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ non tous nuls rendant identiquement nul le vecteur $\lambda_1 \vec{\eta}_1 + \lambda_2 \vec{\eta}_2 + \cdots + \lambda_n \vec{\eta}_n$. Tout vecteur $\vec{x}$ peut alors d'une ma-

nière et d'une seule se mettre sous la forme $u^1 \vec{\eta_1} + u^2 \vec{\eta_2} + \cdots + u^n \vec{\eta_n}$. Le carré scalaire de ce vecteur est

$$u^i u^j \vec{\eta_i} \cdot \vec{\eta_j},$$

formule dans laquelle, suivant la convention d'Einstein, on a supprimé le signe de sommation : l'indice i et l'indice j prennent, successivement et indépendamment l'un de l'autre, toutes les valeurs $1, 2, \cdots, n$. En posant

$$g_{ij} = g_{ji} = \vec{\eta_i} \cdot \vec{\eta_j}, \tag{3}$$

la forme fondamentale devient

$$\Phi \equiv g_{ij} u^i u^j. \tag{4}$$

Nous dirons encore que l'ensemble des vecteurs $\vec{\eta_1}, \cdots, \vec{\eta_n}$ forme une *base*, ou qu'ils constituent un repère cartésien. Nous ne considérons que des vecteurs de base ayant toujours le même point origine.

Réciproquement cherchons si une forme quadratique donnée *a priori* est susceptible, dans un espace euclidien donné, de représenter la forme fondamentale par un choix convenable du repère. Nous supposons naturellement les variables et les coefficients complexes si l'espace est complexe, réels si l'espace est réel. Nous allons appliquer un théorème classique de la théorie des formes quadratiques.

3. Réduction d'une forme quadratique à une somme de carrés. — THÉORÈME.— *Toute forme quadratique est réductible à une somme de carrés par une substitution linéaire effectuée sur les variables.*

La démonstration que nous allons donner s'applique aussi bien au domaine réel qu'au domaine complexe. Supposons d'abord que l'un des coefficients $g_{11}, g_{22}, \cdots, g_{nn}$ ne soit pas nul, g_{11} par exemple. Considérons la forme

$$\Phi_1 \equiv \Phi - \frac{1}{g_{11}} (g_{11}u^1 + g_{12}u^2 + \cdots + g_{1n}u^n)^2;$$

elle ne contient plus la variable u^1 ; en posant

$$y_1 = g_{11}u^1 + g_{12}u^2 + \cdots + g_{1n}u^n,$$

nous avons donc

$$\Phi \equiv \frac{1}{g_{11}} y_1^2 + \Phi_1,$$

Φ_1 étant une forme quadratique aux $n-1$ variables $u^2, u^3, \cdots, u^n$. Si au contraire tous les coefficients $g_{11}, g_{22}, \cdots, g_{nn}$ sont nuls, l'un au moins des autres coefficients, soit g_{12}, est différent de zéro. Posons dans ce cas

$$\Phi_2 = \Phi - \frac{2}{g_{12}}(g_{21}u^1 + g_{23}u^3 + \cdots + g_{2n}u^n)(g_{12}u^2 + g_{13}u^3 + \cdots + g_{1n}u^n)\,;$$

la forme Φ_2 ne contient plus les variables u^1 et u^2 ; en posant

$$\begin{aligned} y_1 + y_2 &= g_{21}u^1 + g_{23}u^3 + \cdots + g_{2n}u^n, \\ y_1 - y_2 &= g_{12}u^2 + g_{13}u^3 + \cdots + g_{1n}u^n, \end{aligned}$$

ce qui définit immédiatement les formes y_1 et y_2, on a

$$\Phi \equiv \frac{2}{g_{12}}(y_1{}^2 - y_2{}^2) + \Phi_2,$$

Φ_2 étant une forme quadratique aux $n-2$ variables $u^3, \cdots, u^n$.

On procédera maintenant sur Φ_1 et sur Φ_2 comme on a procédé sur Φ et on arrivera de proche en proche à mettre Φ sous la forme d'une somme de carrés de formes linéaires indépendantes, chaque carré étant multiplié par un certain facteur constant. Dans le domaine réel, les opérations n'introduiront aucun élément imaginaire.

Soit

$$\Phi \equiv \alpha_1 y_1{}^2 + \alpha_2 y_2{}^2 + \cdots + \alpha_\nu y_\nu{}^2 \qquad (\nu \leqslant n).$$

Si l'on est dans le domaine complexe on prendra $y_i\sqrt{\alpha_i}$ comme nouvelles variables et Φ sera ramenée à une somme de carrés. Si l'on est dans le domaine réel, il faudra distinguer les coefficients α_i positifs et les coefficients α_i négatifs ; on pourra toujours, en prenant $y_i\sqrt{\pm\alpha_i}$ comme nouvelles variables, ramener Φ à la forme

$$\Phi \equiv y_1{}^2 + y_2{}^2 + \cdots + y_p{}^2 - y^2_{p+1} - \cdots - y_q{}^2.$$

4. Théorème d'inertie.— *Dans le domaine réel, le nombre des carrés positifs et le nombre des carrés négatifs ne dépendent pas de la manière dont la décomposition a été faite.*

Supposons en effet deux décompositions

$$\begin{aligned} \Phi &\equiv y_1{}^2 + \cdots + y_p{}^2 - z_1{}^2 - z_2{}^2 - \cdots - z_q{}^2, \\ \Phi &\equiv v_1{}^2 + \cdots + v_{p'}{}^2 - w_1{}^2 - w_2{}^2 - \cdots - w_{q'}{}^2, \end{aligned}$$

les formes linéaires y_i et z_j étant indépendantes, ainsi que les

formes linéaires v_i et w_j. Supposons $p \neq p'$, par exemple $p < p'$. On a l'identité

$$y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_p^2 + w_1^2 + w_2^2 + \cdots + w_{q'}^2 \equiv v_1^2 + v_2^2 + \cdots + v_{p'}^2 + z_1^2 + z_2^2 + \cdots + z_q^2.$$

Considérons les $p + q'$ équations linéaires

$$y_1 = y_2 = \cdots = y_p = w_1 = w_2 = \cdots = w_{q'} = 0\,;$$

comme $p + q' < p' + q' \leq n$, ces équations admettent au moins une solution pour laquelle les inconnues $u^1, u^2, \cdots, u^n$ ne sont pas toutes nulles ; pour cette solution on a

$$v_1 = v_2 = \cdots = v_{p'} = z_1 = z_2 = \cdots = z_q = 0\,;$$

il est donc possible de satisfaire aux $p' + q'$ équations indépendantes

$$v_1 = v_2 = \cdots = v_{p'} = w_1 = w_2 = \cdots = w_{q'} = 0$$

en résolvant un système d'un moindre nombre $(p + q')$ d'équations ; ce résultat est absurde.

On a donc $p = p'$, $q = q'$.

Ajoutons que si la forme donnée Φ en $u^1, u^2, \cdots, u^n$, *n'est pas dégénérée*, c'est-à-dire si les n formes $\frac{\partial \Phi}{\partial u^1}, \frac{\partial \Phi}{\partial u^2}, \cdots, \frac{\partial \Phi}{\partial u^n}$ sont indépendantes, ou encore si le *discriminant*

$$g = \begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} & \cdots & g_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ g_{n1} & g_{n2} & \cdots & g_{nn} \end{vmatrix} \tag{5}$$

de la forme est différent de zéro, le nombre $p + q$ des carrés indépendants obtenus dans la réduction à une somme de carrés est égal à n. Sinon en effet les n dérivées $\frac{\partial \Phi}{\partial u^i}$, qui sont des combinaisons linéaires des $p + q < n$ formes $y_1, \cdots, y_p, z_1, \cdots, z_q$, ne seraient pas indépendantes.

5. Ces théorèmes étant démontrés, revenons à notre problème. Partons d'une forme quadratique (4) *non dégénérée*. Dans le domaine complexe il existe n formes linéaires indépendantes

$$x_i = a_{ik} u^k \qquad (i = 1, 2, \cdots, n)$$

telles que l'on ait

$$\Phi \equiv x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2.$$

Si alors dans l'espace euclidien complexe on considère les vecteurs $\vec{\eta}_k$ de composantes $(a_{1k}, a_{2k}, \cdots, a_{nk})$ $(k = 1, 2, \cdots, n)$, ces n

vecteurs sont indépendants; le vecteur $u^k \overrightarrow{\eta_k}$ a précisément pour $i^{ème}$ composante $a_{ik} u^k = x_i$, et son carré scalaire $x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2$ est égal à la forme quadratrique donnée. La forme fondamentale primitivement donnée de l'espace peut donc par un choix convenable des vecteurs de base être ramenée à la forme quadratique $g_{ij}u^iu^j$ arbitrairement donnée.

Dans le domaine réel le raisonnement est le même ; mais la forme quadratique $g_{ij}u^iu^j$ doit : 1° ne pas être dégénérée ; 2° être réductible à une somme de $n-h$ carrés positifs et de h carrés négatifs, h étant un entier donné.

6. Composantes contrevariantes et covariantes. — Supposons l'espace euclidien rapporté à un repère cartésien quelconque et soit

$$\Phi \equiv g_{ij}x^ix^j$$

sa forme fondamentale. Le carré scalaire du vecteur $\vec{x} + \lambda \vec{y}$ est égal à

$$\Phi(x) + \lambda^2\Phi(y) + \lambda\left(y^i \frac{\partial\Phi}{\partial x^i}\right);$$

il en résulte que *le produit scalaire de deux vecteurs* $\vec{x}$ *et* $\vec{y}$ *est*

$$\frac{1}{2} y^i \frac{\partial\Phi}{\partial x^i} = g_{ij}x^iy^j;$$

on retrouve en particulier la signification géométrique des coefficients si on prend pour $\vec{x}$ et $\vec{y}$ les deux vecteurs de base $\vec{e_i}$ et $\vec{e_j}$.

On appelle *composantes covariantes* d'un vecteur $\vec{x}$ les produits scalaires $\vec{x}\cdot\vec{e_1}$, $\vec{x}\cdot\vec{e_2}$, $\cdots$, $\vec{x}\cdot\vec{e_n}$. On les désigne par $x_1, x_2, \cdots, x_n$. On a donc

$$(6) \qquad x_i = \vec{x}\cdot\vec{e_i} = g_{ik}x^k; \qquad \vec{x}\cdot\vec{y} = g_{ij}x^iy^j = x^iy_i = x_iy^i.$$

Les composantes ordinaires x^i sont dites *contrevariantes*. On passe réciproquement des composantes covariantes aux contrevariantes en résolvant (6), ce qui donne

$$(7) \qquad x^i = g^{ik}x_k,$$

en désignant par g^{ij} le quotient par g du mineur relatif à g_{ij} dans le discriminant de la forme fondamentale. Dans le cas de la forme (1), on a $x_i = x^i$.

II. — ROTATIONS ET RETOURNEMENTS.

7. Définition. — On appelle rotations et retournements (sous-entendu : autour du point origine) l'ensemble des substitutions linéaires effectuées sur les coordonnées et qui laissent invariante la forme fondamentale. Si une opération de cette nature transforme deux vecteurs $\vec{x}$, $\vec{y}$ en $\vec{x}'$, $\vec{y}'$, elle transforme le vecteur $\vec{x} + \lambda \vec{y}$ en $\vec{x}' + \lambda \vec{y}'$. Elle laisse naturellement invariante la longueur de tout vecteur et le produit scalaire de deux vecteurs quelconques. Dans un espace pseudo-euclidien réel elle transforme un vecteur d'espace en un vecteur d'espace, et un vecteur de temps en un vecteur de temps.

Dans tous les cas une opération de la nature envisagée transforme tout repère rectangulaire en un repère rectangulaire. Réciproquement soient deux repères rectangulaires $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \cdots, \vec{e}_n)$ et $(\vec{\eta}_1, \vec{\eta}_2, \cdots, \vec{\eta}_n)$ et supposons $\vec{\eta}_i = a_i{}^k \vec{e}_k$. Rapportons l'espace au premier de ces repères et désignons par x^i les coordonnées correspondantes. La substitution linéaire

$$(x^i)' = a_k{}^i x^k$$

a pour effet de transformer le vecteur $\vec{e}_i$ dans le vecteur de composantes $(a_i{}^1, a_i{}^2, \cdots, a_i{}^n)$, c'est-à-dire dans le vecteur $\vec{\eta}_i$; cette substitution conserve d'autre part la forme fondamentale Φ, car le carré scalaire $\Phi(x')$ du vecteur $(x^i)' \, \vec{e}_i = a_k{}^i \, x^k \, \vec{e}_i = x^k \, \vec{\eta}_k$ est égal à $\Phi(x)$.

8. Nous allons maintenant démontrer le théorème suivant.

Théorème. — *Le déterminant de la substitution linéaire qui définit une rotation ou un retournement est égal à $+1$ ou à -1.*

Il suffit de se placer dans le domaine complexe, car toute rotation réelle dans un espace euclidien réel est une rotation particulière de l'espace complexe.

Supposons d'abord le repère rectangulaire et soient

(8) $$x_i' = a_{ik} x_k \qquad (i = 1, 2, \cdots, n)$$

les équations de la substitution. L'invariance de la forme fondamentale se traduit par les relations

$$a_{1i}^2 + a_{2i}^2 + \cdots + a_{ni}^2 = 1 \qquad (i = 1, 2, \cdots, n),$$
$$a_{1i}a_{1j} + a_{2i}a_{2j} + \cdots + a_{ni}a_{nj} = 0 \qquad (i \neq j).$$

Si alors on applique la règle de multiplication des déterminants au produit du déterminant de la substitution par lui-même, on obtient un déterminant dont tous les éléments sont nuls, sauf ceux de la diagonale principale, qui sont tous égaux à 1. C. Q. F. D.

Si l'on part maintenant d'un repère quelconque, ce qui correspond au changement de coordonnées

$$x_i = \alpha_{ik} u^k,$$

et si à la substitution linéaire (8) correspond pour les u^i la substitution linéaire

$$(u^i)' = b_k{}^i u^k, \tag{9}$$

on a

$$\alpha_{ik} b_h{}^k u^h = a_{ik} \alpha_{kh} u^h \qquad (i, h = 1, 2, \cdots, n).$$

En posant

$$c_{ih} = \alpha_{ik} b_h{}^k = a_{ik} \alpha_{kh},$$

et en appelant c, b, a, α, les déterminants formés avec les c_{ij}, $b^i{}_j$, a_{ij}, α_{ij}, on a

$$c = \alpha b = a\alpha,$$

d'où $b = a = \pm 1$.

Nous appellerons *rotation* l'opération qui se traduit par une substitution linéaire de déterminant $+1$, *retournement* celle qui se traduit par une substitution de déterminant -1.

9. Symétries. — Nous appellerons symétrie par rapport à un hyperplan Π passant par O l'opération qui fait correspondre à un point x son symétrique par rapport à Π, c'est-à-dire le point x' obtenu en abaissant de x la perpendiculaire sur l'hyperplan et en prolongeant cette perpendiculaire d'une longueur égale à elle-même. Soit, par rapport à un repère cartésien quelconque,

$$a_i x^i = 0$$

l'équation de l'hyperplan. Le vecteur $\overrightarrow{x'}$ est défini par deux conditions :

1° le vecteur $\overrightarrow{x'} - \overrightarrow{x}$ est perpendiculaire à l'hyperplan Π ;
2° le vecteur $\frac{1}{2}(\overrightarrow{x'} + \overrightarrow{x})$ est dans l'hyperplan Π.

Comme l'équation de l'hyperplan exprime que le vecteur $\overrightarrow{x}$ est perpendiculaire au vecteur de composantes covariantes a_i, on a

$$(x^i)' - x^i = \lambda a^i, \qquad \text{ou} \qquad (x^i)' = x^i + \lambda a^i,$$

puis

$$a_i(2x^i + \lambda a^i) = 0 \qquad \text{ou} \qquad \lambda = -2\,\frac{a_i x^i}{a_i a^i}.$$

L'opération est possible si $a_i a^i \neq 0$, c'est-à-dire si la perpendiculaire à l'hyperplan n'est pas une droite isotrope ; dans ce cas on a

$$(x^i)' = x^i - 2a^i\,\frac{a_k x^k}{a_k a^k};$$

on vérifie facilement l'invariance de la longueur : $(x_i x^i)' = x_i x^i$.

Nous appellerons d'une manière générale *symétrie* l'opération qui vient d'être définie ; toute symétrie est associée à un hyperplan, ou plus simplement à un vecteur non isotrope a^i (qu'on peut en particulier supposer unitaire).

Dans le cas d'un espace réel à forme fondamentale indéfinie, il y aura lieu de distinguer les symétries associées à un vecteur réel d'espace et celles qui sont associées à un vecteur réel de temps. Nous les appellerons respectivement *symétries d'espace et symétries de temps.*

Toute symétrie est un retournement. Il suffit de le vérifier en la rapportant à un repère cartésien particulier, par exemple celui dont le premier vecteur de base est le vecteur associé à la symétrie ; les équations de la symétrie sont alors

$$(u^1)' = -u^1, \qquad (u^2)' = u^2, \cdots, (u^n)' = u^n,$$

ce qui donne bien un déterminant égal à -1.

10. Décomposition d'une rotation en un produit de symétries. — Nous allons maintenant démontrer le théorème suivant, valable aussi bien dans le domaine réel que dans le domaine complexe.

Toute rotation est le produit d'un nombre pair $\leqslant n$ de symétries, tout retournement est le produit d'un nombre impair $\leqslant n$ de symétries.

Le fait qu'un nombre pair de symétries forment une rotation

et un nombre impair un retournement est une conséquence immédiate du fait qu'une symétrie est un retournement.

Le théorème est évident pour $n = 1$; nous allons le supposer vrai pour les espaces à $1, 2, \cdots, n-1$ dimensions et le démontrer pour les espaces à n dimensions.

Le théorème est évident dans le cas particulier où il existe un vecteur non isotrope invariant par la rotation ou le retournement considéré ; en prenant en effet ce vecteur comme vecteur de base $\vec{\eta}_1$ et un système de $n-1$ autres vecteurs de base dans l'hyperplan perpendiculaire Π, hyperplan qui ne contient pas $\vec{\eta}_1$, la forme fondamentale devient

$$\Phi \equiv g_{11}(u^1)^2 + g_{ij}u^iu^j \equiv g_{11}(u^1)^2 + \Psi,$$

la forme Ψ étant une forme non dégénérée à $n-1$ variables. La rotation (ou retournement) considérée laissant invariant l'hyperplan se traduit par une substitution linéaire laissant invariante la coordonnée u^1 et transformant entre elles les variables $u^2, u^3, \cdots, u^n$ de manière à laisser invariante la forme Ψ ; elle est donc complètement déterminée par une rotation ou un retournement de l'espace euclidien à $n-1$ dimensions déterminé par l'hyperplan Π ; par hypothèse elle résulte donc de symétries associées à des vecteurs situés dans Π, symétries en nombre au plus égal à $n-1$.

Venons maintenant au cas général ; prenons un vecteur non isotrope quelconque $\vec{a}$ et soit $\vec{a}'$ le vecteur transformé par l'opération considérée. Si le vecteur $\vec{a}' - \vec{a}$ n'est pas isotrope, la symétrie associée à ce vecteur transforme évidemment $\vec{a}$ en $\vec{a}'$; l'opération considérée résulte donc de cette symétrie suivie d'une autre opération laissant fixe le vecteur non isotrope $\vec{a}'$; elle résulte donc de symétries en nombre au plus égal à n.

Le raisonnement tombe en défaut si, quel que soit le vecteur $\vec{x}$, le vecteur $\vec{x}' - \vec{x}$ est isotrope, $\vec{x}'$ étant le transformé de $\vec{x}$. Examinons ce cas. Les vecteurs $\vec{x}' - \vec{x}$ forment un ensemble linéaire, en ce sens qu'en même temps que les vecteurs $\vec{x}' - \vec{x}$ et $\vec{y}' - \vec{y}$, il contient le vecteur $(\vec{x}' - \vec{x}) + \lambda(\vec{y}' - \vec{y})$. Soit p la dimension de cet ensemble, qui constitue ce que nous appellerons un p-plan. Prenons dans ce p-plan p vecteurs de base $\vec{\eta}_1, \vec{\eta}_2, \cdots, \vec{\eta}_p$; la

variété plane perpendiculaire à ces p vecteurs est définie par p équations linéaires indépendantes ; elle est à $n-p$ dimensions, mais elle comprend chacun des vecteurs $\overrightarrow{\eta_i}$; on peut prendre dans cette variété comme vecteurs de base $\overrightarrow{\eta_1}, \cdots, \overrightarrow{\eta_p}$ et $n-2p$ autres vecteurs indépendants $\overrightarrow{\zeta_1}, \overrightarrow{\zeta_2}, \cdots, \overrightarrow{\zeta_{n-2p}}$. Ajoutons enfin à ces $n-p$ vecteurs p vecteurs nouveaux $\overrightarrow{\theta_1}, \overrightarrow{\theta_2}, \cdots, \overrightarrow{\theta_p}$ de manière à former une base pour l'espace total.

Remarquons que $\overrightarrow{x}$ et $\overrightarrow{y}$ étant deux vecteurs quelconques, on a

$$\overrightarrow{x'} - \overrightarrow{x} = a^i \overrightarrow{\eta_i}, \qquad \overrightarrow{y'} - \overrightarrow{y} = b^k \overrightarrow{\eta_k};$$

en exprimant l'égalité de $\overrightarrow{x'} \cdot \overrightarrow{y'}$ et $\overrightarrow{x} \cdot \overrightarrow{y}$, on trouve

$$\overrightarrow{x} \cdot b^k \overrightarrow{\eta_k} = -\overrightarrow{y} \cdot a^k \overrightarrow{\eta_k}.$$

Prenons pour y un quelconque des vecteurs $\overrightarrow{\eta_i}$ et $\overrightarrow{\zeta_j}$; le second membre de l'égalité est nul ; par suite le vecteur $b^k \overrightarrow{\eta_k}$ est perpendiculaire à un vecteur quelconque $\overrightarrow{x}$: cela n'est possible que s'il est nul. D'où la conclusion que les vecteurs $\overrightarrow{\eta_i}$ et $\overrightarrow{\zeta_j}$ sont invariants par l'opération considérée.

Formons maintenant la forme fondamentale de l'espace ; en désignant par $u^i \overrightarrow{\eta_i} + v^j \overrightarrow{\zeta_j} + w^k \overrightarrow{\theta_k}$ un vecteur arbitraire, on trouve

$$\Phi \equiv u^i w^k \overrightarrow{\eta_i} \cdot \overrightarrow{\theta_k} + v^j v^k \overrightarrow{\zeta_j} \cdot \overrightarrow{\zeta_k} + v^j w^k \overrightarrow{\zeta_j} \cdot \overrightarrow{\theta_k} + w^j w^k \overrightarrow{\theta_j} \cdot \overrightarrow{\theta_k}.$$

Cette forme n'est pas dégénérée ; par suite les coefficients de $u^1, u^2, \cdots, u^p$ sont des formes linéaires indépendantes en $w^1, w^2, \cdots, w^p$; on peut donc choisir les vecteurs de base $\overrightarrow{\theta_k}$ de manière à avoir

$$\overrightarrow{\eta_i} \cdot \overrightarrow{\theta_j} = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad i = j, \\ 0 & \text{si} \quad i \neq j. \end{cases}$$

On peut ensuite s'arranger pour que $\frac{\partial \Phi}{\partial w^i}$, qui est égal à u^i plus une combinaison linéaire des v^j et des w^k, se réduise à u^i : cela revient à modifier chaque vecteur $\overrightarrow{\zeta_j}$, $\overrightarrow{\theta_k}$ par l'addition d'une combinaison linéaire des $\overrightarrow{\eta_i}$; on aura alors

$$\Phi \equiv \sum u^i w^i + \gamma_{jk} v^j v^k,$$

la seconde somme du second membre n'étant pas dégénérée. Les $\overrightarrow{\zeta_j}$ étant invariants par l'opération (rotation ou retournement) considérée, nous sommes, si $n > 2p$, dans le cas particulier d'in-

variance d'un vecteur non isotrope et le théorème est démontré. Reste donc le cas $n = 2p$. On a

$$\vec{\eta}_i{}' = \vec{\eta}_i, \qquad \vec{\theta}_i{}' = \vec{\theta}_i + \beta_{ik}\vec{\eta}_k;$$

les égalités $\vec{\eta}_i \cdot \vec{\theta}_i = 1$, $\vec{\eta}_i \cdot \vec{\theta}_j = 0$ $(i \neq j)$ conduisent, en exprimant l'invariance des produits scalaires $\vec{\theta}_i \cdot \vec{\theta}_j$, aux relations $\beta_{ij} + \beta_{ji} = 0$.

On peut encore simplifier les formules précédentes. En effet le transformé d'une combinaison linéaire arbitraire $w^k\vec{\theta}_k$ des vecteurs $\vec{\theta}_k$ est

$$w^k\vec{\theta}_k{}' = w^k\vec{\theta}_k + w^k\beta_{kh}\vec{\eta}_h.$$

Or la somme $w^k\beta_{kh}\vec{\eta}_h$ reste invariante par un changement quelconque de la base $\vec{\eta}_i$ accompagné du changement corrélatif de la base $\vec{\theta}_k$; or les $\vec{\eta}_i$ et les w^i se transforment de la même manière (invariance de $\Sigma u^i w^i$ et de $\Sigma u^i \vec{\eta}_i$). On sait d'autre part qu'une forme bilinéaire alternée, quand on effectue sur les deux séries de variables une même substitution linéaire, peut toujours se ramener à une forme normale, qu'on peut écrire ici

$$\overset{1}{w}\vec{\eta}_2 - \overset{2}{w}\vec{\eta}_1 + \overset{3}{w}\vec{\eta}_4 - \overset{4}{w}\vec{\eta}_3 + \cdots + w^{2q-1}\vec{\eta}_{2q} - w^{2q}\vec{\eta}_{2q-1}.$$

On aura donc, par un changement de base approprié, les formules de transformation

$$\vec{\theta}_1{}' = \vec{\theta}_1 + \vec{\eta}_2, \qquad \vec{\theta}_2{}' = \vec{\theta}_2 - \vec{\eta}_1, \cdots, \qquad \vec{\theta}'_{2q-1} = \vec{\theta}_{2q-1} - \vec{\eta}_{2q},$$
$$\vec{\theta}'_{2q} = \vec{\theta}_{2q} + \vec{\eta}_{2q-1};$$

on a du reste nécessairement $p = 2q$, sans quoi le vecteur non isotrope $\vec{\theta}_p + \vec{\eta}_p$ serait invariant. Chacun des espaces à 4 dimensions à forme fondamentale non dégénérée, engendrés par les vecteurs $(\vec{\eta}_1, \vec{\eta}_2, \vec{\theta}_1, \vec{\theta}_2)$, $(\vec{\eta}_3, \vec{\eta}_4, \vec{\theta}_3, \vec{\theta}_4)$, etc., est invariant par l'opération considérée. Il suffit donc de démontrer qu'elle se traduit sur chacun d'eux par 4 symétries au plus. Prenons la première, dont la forme fondamentale est

$$u^1w^1 + u^2w^2;$$

la rotation (ou retournement) se traduit par

$$(u^1)' = u^1 + w^2, \qquad (u^2)' = u^2 - w^1, \qquad (w^1)' = w^1, \qquad (w^2)' = w^2;$$

comme le déterminant est $+ 1$, c'est une rotation. On constate

sans difficulté qu'elle résulte des symétries successives associées aux quatre vecteurs non isotropes

$$\vec{\eta}_2 + \vec{\theta}_2, \qquad \alpha\vec{\eta}_2 + \vec{\theta}_2, \qquad \vec{\eta}_1 + \alpha\vec{\eta}_2 + \left(1 - \frac{1}{\alpha}\right)\vec{\theta}_2,$$
$$\vec{\eta}_1 + \vec{\eta}_2 + \left(1 - \frac{1}{\alpha}\right)\vec{\theta}_2,$$

où α est un coefficient différent de zéro et de 1. Le théorème est donc démontré.

Dans le cas d'espaces euclidiens réels, la démonstration précédente ne fait intervenir que des vecteurs réels sous la seule condition de prendre α réel.

11. Continuité du groupe des rotations. — Nous allons démontrer que dans l'espace complexe et dans l'espace réel à forme fondamentale définie le groupe [1] des rotations est continu. Cela signifie que toute rotation peut être reliée à la transformation identique par une suite continue de rotations. Il suffit de le démontrer pour une rotation résultant de deux symétries. Soient deux symétries associées à deux vecteurs unitaires $\vec{a}$ et $\vec{b}$; on peut si $n \geqslant 3$ trouver au moins un vecteur unitaire $\vec{c}$ perpendiculaire à $\vec{a}$ et à $\vec{b}$; considérons la suite continue de rotations résultant des symétries associées aux vecteurs unitaires

$$\vec{a'} = \vec{a}\cos t + \vec{c}\sin t, \qquad \vec{b'} = \vec{b}\cos t + \vec{c}\sin t,$$

où t désigne un paramètre réel variant de 0 à $\frac{\pi}{2}$; pour $t = 0$ on a la rotation donnée et pour $t = \frac{\pi}{2}$ la rotation résultant de la même symétrie (associée à $\vec{c}$) effectuée deux fois de suite, c'est-à-dire la rotation identique.

Théorème. — *Dans l'espace euclidien complexe et dans l'espace euclidien réel à forme fondamentale définie positive, les rotations (réelles dans le second cas) forment un groupe continu.*

---

[1] Dire que les rotations forment un groupe, c'est exprimer la double propriété suivante de l'ensemble des rotations :

1° le produit de deux rotations est une rotation ;

2° à chaque rotation correspond une autre rotation inverse de la première.

12. Rotations propres et rotations impropres. — Nous allons montrer que dans un espace pseudo-euclidien réel (à forme fondamentale indéfinie), le groupe des rotations n'est pas continu, mais se décompose en deux familles continues distinctes, que nous appellerons la famille des *rotations propres* et la famille des *rotations impropres*.

Lemme I. — *Deux vecteurs unitaires d'espace peuvent toujours être reliés par une suite continue de vecteurs unitaires d'espace.*

Prenons pour forme fondamentale

$$F \equiv x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x^2_{n-h} - x^2_{n-h+1} - \cdots - x_n^2.$$

Un vecteur d'espace réel $\overrightarrow{x}$ est défini par n nombres réels dont les $n-h$ premiers peuvent être regardés comme les composantes d'un vecteur $\overrightarrow{u}$ d'un espace euclidien réel E_{n-h} et les h derniers comme les composantes d'un vecteur $\overrightarrow{v}$ d'un espace euclidien réel E_h. Si le vecteur $\overrightarrow{x}$ est unitaire, on a $\overrightarrow{u}^2 - \overrightarrow{v}^2 = 1$, ce qui permet de poser

$$\overrightarrow{u} = \overrightarrow{a}\,\mathrm{ch}\,\alpha, \qquad \overrightarrow{v} = \overrightarrow{b}\,\mathrm{sh}\,\alpha,$$

α étant un nombre réel, $\overrightarrow{a}$ et $\overrightarrow{b}$ deux vecteurs unitaires de E_{n-h} et E_h. Un autre vecteur unitaire d'espace $\overrightarrow{x'}$ sera de même défini par un nombre réel α' et deux vecteurs unitaires réels $\overrightarrow{a'}$, $\overrightarrow{b'}$. On pourra passer d'une manière continue de $\overrightarrow{x}$ à $\overrightarrow{x'}$

1° en laissant $\overrightarrow{a}$ et $\overrightarrow{b}$ fixes et faisant varier α d'une manière continue jusqu'à α' ;

2° en laissant $\overrightarrow{b}$ fixe et reliant dans E_{n-h} $\overrightarrow{a}$ à $\overrightarrow{a'}$ par une suite continue de vecteurs unitaires réels ;

3° en laissant $\overrightarrow{a'}$ fixe et reliant dans E_h $\overrightarrow{b}$ à $\overrightarrow{b'}$ par une suite continue de vecteurs unitaires réels.

Le même Lemme s'applique évidemment à deux vecteurs unitaires de temps.

Lemme II. — *La rotation résultant de deux symétries d'espace [ou de temps] peut être reliée à la rotation identique par une suite continue de rotations.*

Soit la rotation résultant des symétries associées aux deux vecteurs unitaires d'espace $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$, et soit $\overrightarrow{w_t}$ une suite continue de

vecteurs unitaires d'espace reliant $\vec{u}$ à $\vec{v}$; la rotation résultant des symétries associées à $\vec{w_t}$ et $\vec{v}$ relie d'une manière continue la rotation donnée à la rotation identique.

Lemme III. — *Dans toute rotation [ou retournement] le déterminant fonctionnel de x_1', x_2', $\cdots$, x'_{n-h} par rapport à x_1, x_2, $\cdots$, x_{n-h} est différent de zéro.*

Supposons en effet qu'il n'en soit pas ainsi. Il existe des valeurs non toutes nulles a_1, a_2, $\cdots$, a_{n-h} de x_1, x_2, $\cdots$, x_{n-h} annulant, dans les expressions de x'_1, x'_2, $\cdots$, x'_{n-h} en fonction de x_1, x_2, $\cdots$, x_n, l'ensemble des termes en x_1, x_2, $\cdots$, x_{n-h}. Le transformé du vecteur $(a_1, a_2, \cdots, a_{n-h}, 0, \cdots, 0)$, qui est un vecteur d'espace, a alors ses $n-h$ premières composantes $x'_1, x'_2, \cdots, x'_{n-h}$ toutes nulles : c'est donc un vecteur de temps, résultat absurde.

Cela posé arrivons à la démonstration du théorème. Remarquons d'abord que d'après le Lemme III deux rotations susceptibles d'être liées l'une à l'autre par une suite continue de rotations donnent le même signe au déterminant fonctionnel Δ de x'_1, $\cdots$, x'_{n-h} par rapport à x_1, $\cdots$, x_{n-h}, puisqu'en passant de l'une à l'autre ce déterminant varie d'une manière continue sans s'annuler. D'après le Lemme II les rotations résultant d'un nombre pair de symétries d'espace et d'un nombre pair de symétries de temps donnent à Δ le même signe que la rotation identique, c'est-à-dire le signe $+$. Au contraire une rotation résultant d'une symétrie d'espace et d'une symétrie de temps peut, d'après le Lemme I, être reliée par une suite continue de rotations à la rotation résultant des symétries associées aux vecteurs $\vec{e_1}$ et $\vec{e_n}$; elle donne donc à Δ le même signe que cette dernière rotation, signe qui est évidemment $-$. Une rotation résultant d'un nombre impair de symétries d'espace et d'un nombre impair de symétries de temps peut aussi être ramenée à cette dernière par une suite continue de rotations. On a donc le théorème suivant :

Théorème. — *Dans un espace pseudo-euclidien réel le groupe des rotations se décompose en deux familles distinctes : la première est formée par le groupe des rotations propres, résultant d'un nombre pair de symétries d'espace et d'un nombre pair de symétries de temps ; la deuxième est constituée par l'ensemble des rotations impropres,*

résultant d'un nombre impair de symétries d'espace et d'un nombre impair de symétries de temps ; cet ensemble ne forme pas un groupe.

Les rotations propres et impropres se distinguent par le signe du déterminant fonctionnel de $x'_1, x_2', \cdots, x'_{n-h}$ par rapport à $x_1, x_2, \cdots, x_{n-h}$, ou encore du déterminant fonctionnel de $x'_{n-h+1}, \cdots, x'_n$ par rapport à $x_{n-h+1}, \cdots, x_n$.

Nous considérerons plus loin ce que nous appellerons les *retournements propres* résultant d'un nombre impair de symétries d'espace et d'un nombre pair de symétries de temps. Ils sont caractérisés par la propriété du déterminant fonctionnel de $x'_{n-h+1}, \cdots, x'_n$ par rapport à $x_{n-h+1}, \cdots, x_n$ d'être positif (*invariance de l'orientation du temps*).

13. Cas des espaces pour lesquels h = 1. — Dans ces espaces toute rotation propre ou tout retournement propre est le produit de symétries d'espace. En effet soit $\vec{x}$ un vecteur unitaire de temps, $\vec{x'}$ son transformé ; nous pouvons prendre $\vec{x}$ comme vecteur de base $\vec{e_n}$; le coefficient de x_n dans x'_n étant positif, la composante x'_n de $\vec{x'}$ est positive et supérieure à 1 et le produit scalaire $\vec{x} \cdot \vec{x'}$ est donc inférieur à -1. Le vecteur $\vec{x'} - \vec{x}$ a pour carré scalaire $-2\,\vec{x} \cdot \vec{x'} - 2 > 0$; c'est donc un vecteur d'espace. On peut donc passer de $\vec{x}$ à $\vec{x'}$ par une symétrie d'espace et pour achever la rotation (ou le retournement) considérée, il suffira d'opérer dans l'espace euclidien réel à forme fondamentale définie perpendiculaire à $\vec{x'}$, ce qui donnera $n - 1$ au plus de symétries d'espace.

Théorème. — *Dans un espace dont la forme fondamentale est réductible à $n - 1$ carrés positifs et 1 négatif, toute rotation propre et tout retournement propre résultent d'un certain nombre $\leqslant n$ de symétries d'espace.*

III. — MULTIVECTEURS.

14. Volume de l'hyperparallélépipède construit sur n vecteurs. — Etant donnés, dans un espace euclidien E_n rapporté à un repère cartésien quelconque, n vecteurs rangés dans un certain ordre

$\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}, \cdots, \vec{t}$, considérons le déterminant formé par les composantes contrevariantes de ces vecteurs

$$\Delta = \begin{vmatrix} x^1 x^2 \cdots x^n \\ y^1 y^2 \cdots y^n \\ \cdots\cdots\cdots \\ t^1 \; t^2 \cdots t^n \end{vmatrix};$$

étant donné que toute rotation se traduit par une substitution linéaire de déterminant 1 et tout retournement par une substitution linéaire de déterminant — 1, il en résulte que Δ se reproduit au signe près quand on effectue sur les vecteurs une même rotation ou un même retournement. On pourrait aussi considérer le déterminant Δ' construit avec les composantes covariantes des vecteurs ; ce déterminant Δ' est égal au produit de Δ par le déterminant de la substitution qui permet de passer des composantes contrevariantes aux composantes covariantes, c'est-à-dire par g.

D'autre part si on effectue le produit

$$\Delta\Delta' = \begin{vmatrix} x^1 x^2 \cdots x^n \\ y^1 y^2 \cdots y^n \\ \cdots\cdots\cdots \\ t^1 \; t^2 \cdots t^n \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x_1 x_2 \cdots x_n \\ y_1 y_2 \cdots y_n \\ \cdots\cdots\cdots \\ t_1 \; t_2 \cdots t_n \end{vmatrix},$$

on trouve immédiatement

$$\Delta\Delta' = \begin{vmatrix} \vec{x}^2 & \vec{x}\cdot\vec{y} & \cdots & \vec{x}\cdot\vec{t} \\ \vec{y}\cdot\vec{x} & \vec{y}^2 & \cdots & \vec{y}\cdot\vec{t} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \vec{t}\cdot\vec{x} & \vec{t}\cdot\vec{y} & \cdots & \vec{t}^2 \end{vmatrix},$$

déterminant qui ne fait intervenir que les produits scalaires deux à deux des vecteurs donnés. Pour $n = 3$ ce déterminant est le carré du volume du parallélépipède construit sur les 3 vecteurs. Il est naturel d'appeler hypervolume la racine carrée de ce déterminant pour n quelconque. On a donc

$$V^2 = \Delta\Delta' = g\Delta^2,$$

d'où

$$V = \sqrt{g}\,\Delta = \frac{1}{\sqrt{g}}\Delta'.$$

Si l'espace est pseudo-euclidien réel, il pourra être plus commode de poser

$$V = \sqrt{|g|}\,\Delta = \frac{1}{\sqrt{|g|}}\Delta';$$

le signe de Δ donne l'orientation du n-èdre constitué par les n vecteurs, orientation qui est la même que celle du repère cartésien si Δ est positif.

15. Multivecteurs. — Considérons maintenant un système de p vecteurs $\vec{x}, \vec{y}, \cdots, \vec{z}$ rangés suivant un certain ordre. Nous dirons qu'ils définissent un p-vecteur et nous conviendrons de dire que deux p-vecteurs sont égaux si la variété plane à p dimensions qui contient les p-vecteurs donnés est la même pour les deux p-vecteurs et si le volume du parallélépipède construit sur les vecteurs est le même, avec la même orientation. Nous allons voir qu'un p-vecteur est complètement défini par les déterminants d'ordre p construits avec le tableau des composantes contrevariantes (ou covariantes) des p vecteurs.

Soit en effet $\vec{t}$ un vecteur variable : pour que ce vecteur soit dans un même p-plan avec les vecteurs donnés, il faut et il suffit que les déterminants d'ordre $p+1$ construits avec le tableau

$$\begin{pmatrix} x^1 \, x^2 \cdots x^n \\ y^1 \, y^2 \cdots y^n \\ \cdots\cdots\cdots \\ z^1 \, z^2 \cdots z^n \\ t^1 \, t^2 \cdots t^n \end{pmatrix}$$

soient nuls. En désignant par $P^{i_1 i_2 \cdots i_p}$ le déterminant construit avec les p premières lignes et les colonnes $i_1, i_2, \cdots, i_p$, on a les équations

$$t^{i_1} P^{i_2 i_3 \cdots i_{p+1}} - t^{i_2} P^{i_1 i_3 \cdots i_{p+1}} + \cdots + (-1)^p t^{i_{p+1}} P^{i_1 i_2 \cdots i_p} = 0.$$

On voit bien que pour que deux p-vecteurs de composantes P et Q soient situés dans le même p-plan, il faut et il suffit que leurs composantes soient proportionnelles.

Supposons cette condition réalisée et $Q^{i_1 i_2 \cdots i_p} = \lambda \, P^{i_1 i_2 \cdots i_p}$; le rapport algébrique des deux p-vecteurs, rapport qui se conserve par projection, sera égal au rapport constant de leurs composantes, qui représentent les volumes de leurs projections sur les différents p-plans de coordonnées.

Remarquons enfin que le carré V^2 de la mesure du p-vecteur est égal à

$$\frac{1}{p\,!} P_{i_1 i_2 \cdots i_p} P^{i_1 i_2 \cdots i_p},$$

où $P_{i_1 i_2 \cdots i_p}$ désignent les composantes covariantes (déterminants construits avec les composantes covariantes des p-vecteurs). On a en effet (nº **14**)

$$V^2 = \begin{vmatrix} \vec{x}^2 & \vec{x}\cdot\vec{y} & \cdots & \vec{x}\cdot\vec{z} \\ \vec{y}\cdot\vec{x} & \vec{y}^2 & \cdots & \vec{y}\cdot\vec{z} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \vec{z}\cdot\vec{x} & \vec{z}\cdot\vec{y} & \cdots & \vec{z}^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x^i x_i & x^j y_j \cdots & x^k z_k \\ y^i x_i & y^j y_j \cdots & y^k z_k \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ z^i x_i & z^j y_j \cdots & z^k z_k \end{vmatrix}$$

$$= x_i y_j \ldots z_k \begin{vmatrix} x^i & x^j \cdots & x^k \\ y^i & y^j \cdots & y^k \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ z^i & z^j \cdots & z^k \end{vmatrix} = \frac{1}{p!} P_{ij\ldots k} P^{ij\ldots k},$$

la somme étant étendue à tous les arrangements p à p des indices $1, 2, \cdots, n$.

L'ensemble de n vecteurs peut s'appeler un n-vecteur ; il a une seule composante contrevariante et une seule composante covariante. Chacune de ces composantes se reproduit changée de signe par un retournement.

16. Multivecteurs isotropes. — Un p-vecteur est dit isotrope si son volume est nul sans que ses composantes soient toutes nulles, si de plus il n'est pas situé dans une variété plane à moins de p dimensions. Pour qu'un p-vecteur soit isotrope, il faut et il suffit qu'il existe dans son p-plan un vecteur perpendiculaire à tous les vecteurs du plan : ce vecteur étant perpendiculaire à lui-même sera du reste isotrope. En effet si le volume du p-vecteur est nul, on peut trouver p constantes $\alpha, \beta, \cdots, \gamma$ non toutes nulles satisfaisant aux équations

$$\begin{aligned} &\alpha \vec{x}^2 + \beta \vec{y}\cdot\vec{x} + \cdots + \gamma \vec{z}\cdot\vec{x} = 0, \\ &\alpha \vec{x}\cdot\vec{y} + \beta \vec{y}^2 + \cdots + \gamma \vec{z}\cdot\vec{y} = 0, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &\alpha \vec{x}\cdot\vec{z} + \beta \vec{y}\cdot\vec{z} + \cdots + \gamma \vec{z}^2 = 0 ; \end{aligned}$$

cela revient à dire qu'il existe un vecteur non nul $\alpha \vec{x} + \beta \vec{y} + \cdots + \gamma \vec{z}$ perpendiculaire aux p vecteurs $\vec{x}, \vec{y}, \cdots, \vec{z}$. La réciproque est vraie. On peut encore dire que le p-plan du p-vecteur est tangent à l'hypercone isotrope (lieu des droites isotropes) le long de la droite qui porte le vecteur $\alpha \vec{x} + \cdots + \gamma \vec{z}$.

17. Multivecteurs supplémentaires. — Considérons un p-vecteur non isotrope; nous dirons qu'un $(n-p)$-vecteur est supplémentaire du p-vecteur si son $(n\text{-}p)$-plan est le lieu des droites perpendiculaires au p-plan du p-vecteur donné, si le volume du $(n\text{-}p)$-vecteur est égal à celui du p-vecteur, si enfin l'orientation du n-èdre formé par les p vecteurs du p-vecteur donné et les $n\text{-}p$ vecteurs du $(n\text{-}p)$-vecteur est positive. Nous remarquerons que le $(n\text{-}p)$-plan du $(n\text{-}p)$-vecteur cherché est bien déterminé et n'a aucune droite commune avec le p-plan du p-vecteur donné, sans quoi ce dernier serait isotrope.

Supposons $P^{12\cdots p} \neq 0$. Les équations qui expriment qu'un vecteur $\vec{t}$ est perpendiculaire aux p vecteurs $\vec{x}$, $\vec{y}$, $\cdots$, $\vec{z}$ sont

$$t_i x^i = 0, \; t_i y^i = 0, \cdots, t_i z^i = 0 \; ;$$

en éliminant $t_2, t_3, \cdots, t_{p+1}$, on obtient la relation

$$t_1 P^{12\cdots p} + t_{p+1} P^{(p+1)2\cdots p} + \cdots + t_n P^{n23\cdots p} = 0 \; ;$$

on obtient de même

$$t_2 P^{213\cdots p} + t_{p+1} P^{(p+1)13\cdots p} + \cdots + t_n P^{n13\cdots p} = 0,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$t_p P^{p12\cdots(p-1)} + t_{p+1} P^{(p+1)12\cdots(p-1)} + \cdots + t_n P^{n12\cdots(p-1)} = 0.$$

Telles sont les équations du $(n\text{-}p)$-plan du $(n\text{-}p)$-vecteur supplémentaire cherché. D'autre part si l'on désigne par $Q_{i_1 i_2 \cdots i_{n-p}}$ les composantes covariantes de ce $(n\text{-}p)$-vecteur, les équations de son $(n\text{-}p)$-plan sont

$$t_{i_1} Q_{i_2 i_3 \cdots i_{n-p+1}} - t_{i_2} Q_{i_1 i_3 \cdots i_{n-p+1}} + \cdots + (-1)^{n-p} t_{i_{n-p+1}} Q_{i_1 i_2 i_3 \cdots i_{n-p}} = 0 \; ;$$

en prenant successivement pour $i_1, i_2, \cdots, i_{n-p+1}$, les combinaisons $(1, p+1, p+2, \cdots, n)$, $(2, p+1, p+2, \cdots, n)$, etc., et en identifiant avec les équations précédemment obtenues du $(n\text{-}p)$-plan, on trouve qu'il y a proportionnalité entre les $P^{i_1 i_2 \cdots i_p}$ et les $Q_{i_{p+1} i_{p+2} \cdots i_n}$, en supposant la permutation $(i_1 \; i_2 \cdots i_n)$ paire. On posera donc

$$P^{i_1 i_2 \cdots i_p} = \lambda Q_{i_{p+1} i_{p+2} \cdots i_n},$$

et aussi

$$P_{i_1 i_2 \cdots i_p} = \mu Q^{i_{p+1} i_{p+2} \cdots i_n} \; ;$$

en exprimant que le p-vecteur et le $(n\text{-}p)$-vecteur supplémentaire ont même mesure, on trouve $\lambda\mu = 1$; d'autre part le n-vecteur

formé par les vecteurs du p-vecteur, puis les vecteurs du $(n\text{-}p)$-vecteur, a pour mesure

$$\frac{1}{\sqrt{g}} \Sigma \mathrm{P}_{i_1 i_2 \cdots i_p} \mathrm{Q}_{i_{p+1} \cdots i_n} = \frac{1}{\sqrt{g}} \Sigma \mathrm{P}_{i_1 i_2 \cdots i_p} \mathrm{P}^{i_1 i_2 \cdots i_p},$$

la somme étant étendue à toutes les combinaisons $i_1 \, i_2 \cdots i_p$ des indices p à p ; cette mesure devant être égale au carré de la mesure du p-vecteur, on a $\lambda = \frac{1}{\sqrt{g}}$, $\mu = \sqrt{g}$, d'où les formules

$$\left\{ \begin{aligned} \mathrm{P}^{i_1 i_2 \cdots i_p} &= \frac{1}{\sqrt{g}} \mathrm{Q}_{i_{p+1} i_{p+2} \cdots i_n}, \\ \mathrm{P}_{i_1 i_2 \cdots i_p} &= \sqrt{g} \mathrm{Q}^{i_{p+1} i_{p+2} \cdots i_n}. \end{aligned} \right. \tag{10}$$

Remarque. — Nous avons supposé, pour définir le $(n\text{-}p)$-vecteur supplémentaire d'un p-vecteur donné, que ce dernier n'était pas isotrope ; mais les formules précédentes ont une signification générale et permettent d'étendre la définition à tous les cas possibles ; il peut ainsi arriver qu'un p-vecteur soit égal à son supplémentaire (si naturellement $n = 2p$).

18. Somme de p-vecteurs. — Considérons un ensemble de p-vecteurs ; nous pouvons convenir de regarder comme égaux deux tels ensembles si les sommes des composantes de mêmes indices des p-vecteurs qui entrent dans l'ensemble sont les mêmes pour les deux ensembles. En désignant ces sommes par les mêmes notations que pour un p-vecteur, on a ce qu'on appelle les composantes de l'ensemble. On convient encore de dire que ces C_n^p composantes définissent un p-vecteur ; les p-vecteurs définis primitivement sont dits *p-vecteurs simples*. On définit le supplémentaire d'un p-vecteur non simple par les mêmes formules que pour un p-vecteur simple. Analytiquement un p-vecteur, dans son acception la plus générale, peut donc être défini comme l'ensemble de C_n^p nombres $\mathrm{P}^{i_1 i_2 \cdots i_p}$, chacun comportant p indices distincts *antisymétriques* : cela veut dire qu'une permutation effectuée sur les indices laisse la composante invariante ou la change de signe, suivant que la permutation est paire ou impaire.

IV. — LES BIVECTEURS ET LES ROTATIONS INFINITÉSIMALES.

Un bivecteur est défini par $\frac{n(n-1)}{2}$ quantités $a^{ij} = -a^{ji}$; la condition nécessaire et suffisante pour qu'un bivecteur soit simple est qu'il existe entre ses composantes les relations

$$a^{ij}a^{kh} + a^{jk}a^{ih} + a^{ki}a^{jh} \qquad (i, j, k, h = 1, 2, \cdots, n).$$

19. Rotations infinitésimales. — Les bivecteurs se présentent quand on considère une famille de rotations dépendant d'un paramètre t. Supposons l'espace rapporté à un repère cartésien $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \cdots, \overrightarrow{e_n})$. Les vitesses à un instant t d'un point x de l'espace ont pour composantes des formes linéaires par rapport aux coordonnées du point : soient en effet

$$(x^i)' = \alpha^i{}_k(t)x^k$$

les équations du mouvement, les x^k désignant les coordonnées du point mobile à un instant initial t_0. Supposons les fonctions $\alpha^i{}_k\,(t)$ dérivables : la vitesse à l'instant t du point dont la position initiale était (x) aura pour composantes

$$v^i = \frac{d\alpha^i{}_k(t)}{dt}\,x^k\,;$$

or les x^k sont des combinaisons linéaires des $(x^i)'$, coordonnées du mobile à l'instant t : les v^i sont donc des combinaisons linéaires de ces dernières coordonnées.

Soient, avec un léger changement de notations,

$$v^i = a^i{}_k x^k$$

les formules qui donnent la vitesse à un instant t du point qui a pour coordonnées x^i à cet instant. La vitesse doit être perpendiculaire au vecteur d'origine O et d'extrémité x : on a donc

$$x_i v^i \equiv a^i{}_k x_i x^k \equiv a_{ik}x^i x^k = 0\,:$$

cela exige $a_{ij} + a_{ji} = 0$. Les $a^i{}_k$ sont donc les composantes *mixtes* d'un bivecteur.

On appelle rotation infinitésimale une rotation variable considérée comme agissant dans un intervalle de temps infiniment

petit $(t, t + dt)$ et comme imprimant à tout point x un déplacement élémentaire égal à $\delta \vec{x} = \vec{v}\, dt$, $\vec{v}$ étant la vitesse à l'instant t.

Toute rotation infinitésimale est donc définie par

$$\delta x^i = a^i{}_k x^k, \tag{11}$$

les $a^i{}_k$ étant les composantes mixtes d'un bivecteur. Les rotations infinitésimales dépendent linéairement de $\frac{n(n-1)}{2}$ paramètres.

CHAPITRE II.

TENSEURS; REPRÉSENTATIONS LINÉAIRES DES GROUPES; MATRICES.

I. — DÉFINITION DES TENSEURS.

20. Premier exemple d'une représentation linéaire. — Etant donné un espace euclidien E_n rapporté à un repère cartésien fixe $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \cdots, \vec{e}_n)$, nous avons considéré les substitutions linéaires S qui représentent l'effet produit sur un vecteur $\vec{x}$ par une rotation donnée $\mathfrak{R}$. Ces substitutions linéaires jouissent de la propriété évidente que si les substitutions S et S′ correspondent aux rotations $\mathfrak{R}$ et $\mathfrak{R}'$, la substitution qui correspond à la rotation $\mathfrak{R}'\mathfrak{R}$ obtenue en effectuant successivement $\mathfrak{R}$ puis $\mathfrak{R}'$ est la substitution S′S obtenue en effectuant d'abord la substitution S, puis la substitution S′. L'ensemble des substitutions S constitue ce que nous appellerons une *représentation linéaire* du groupe des rotations.

Si l'on faisait un changement de repère, le nouveau repère ne résultant pas de l'ancien par une rotation ou un retournement, la rotation $\mathfrak{R}$ qui se traduisait par une substitution linéaire S se traduirait par une autre substitution linéaire distincte T ; l'ensemble des substitutions T constituerait une nouvelle représentation linéaire du groupe des rotations. Mais il est clair qu'il y a une relation étroite entre ces deux représentations, qui représentent analytiquement les mêmes opérations géométriques effectuées sur les mêmes objets géométriques. Cette relation est la suivante : si les x^i sont les composantes d'un vecteur rapporté au premier repère et les y^j les composantes de ce vecteur rapporté au second repère, on passe des x^i aux y^j par une substitution linéaire fixe σ ; chaque substitution T se déduit de la substitution S correspondante en effectuant sur les variables x^i et leurs transformés $(x^i)'$ une

même substitution linéaire fixe, celle qui fait passer des x^i aux y^i. D'une manière plus précise on passe

des y^i aux x^i par la substitution σ^{-1},
des x^i aux $(x^i)'$ par la substitution S,
des $(x^i)'$ aux $(y^i)'$ par la substitution σ ;

par suite le passage des y^i aux $(y^i)'$ se fait par les substitutions successives σ^{-1}, S, σ, ce qu'on exprime par la formule

$$T = \sigma S \sigma^{-1}.$$

Nous dirons que la représentation linéaire T du groupe des rotations est *équivalente* à la représentation linéaire S, et l'équivalence se traduit par l'existence d'une substitution linéaire fixe σ telle qu'à chaque substitution S de la première représentation corresponde la substitution σ S σ^{-1} de la seconde.

21. Définition générale des représentations linéaires du groupe des rotations. — Soient deux vecteurs (x^i) et (y^j) rapportés à un même repère cartésien et considérons les n^2 produits x^iy^j ; par une rotation ils subissent évidemment une substitution linéaire Σ, jouissant encore de la propriété que si Σ et Σ' correspondent aux rotations $\mathfrak{R}$ et $\mathfrak{R}'$, la substitution $\Sigma'\Sigma$ correspond à $\mathfrak{R}'\mathfrak{R}$. Les n^2 quantités x^iy^j fournissent donc une nouvelle représentation linéaire du groupe des rotations, tout à fait distincte des deux premières.

D'une manière générale une famille de substitutions linéaires S portant sur r variables $u_1, u_2, \cdots, u_r$ fournira une représentation linéaire du groupe des rotations si à chaque rotation $\mathfrak{R}$ correspond une substitution S déterminée de telle sorte qu'au produit $\mathfrak{R}'\mathfrak{R}$ de deux rotations corresponde le produit S'S des deux substitutions correspondantes. L'entier r s'appelle le *degré* de la représentation.

22. Représentations équivalentes. — Deux représentations linéaires du groupe des rotations sont *équivalentes* :

1° si elles ont le même degré ;

2° si on peut passer de la première à la seconde en effectuant sur les variables de la première une substitution linéaire σ fixe non dégénérée (à déterminant non nul).

Si S et T correspondent à $\mathfrak{R}$ dans les deux représentations, on a donc

$$T = \sigma S \sigma^{-1},$$

σ désignant une substitution fixe.

Une représentation linéaire est dite *fidèle* si à deux rotations distinctes correspondent deux substitutions linéaires distinctes.

23. Notion de tenseur euclidien. — On peut se demander si les variables $u_1, u_2, \cdots, u_r$ qui figurent dans une représentation linéaire du groupe des rotations sont susceptibles d'une interprétation concrète. On peut dire qu'un ensemble de r nombres $(u_1, u_2, \cdots, u_r)$ constitue un objet et convenir que l'effet produit sur l'objet $(u_1, u_2, \cdots, u_r)$ par la rotation $\mathcal{R}$ est de l'amener en coïncidence avec l'objet $(u'_1, \cdots, u'_r)$ dont les *composantes* u'^i se déduisent des composantes u_i par la substitution S qui correspond à $\mathcal{R}$. Cette convention est *cohérente*, parce que l'effet de la rotation $\mathcal{R}'$ sur l'objet (u') est le même que celui de la rotation $\mathcal{R}'\mathcal{R}$ sur l'objet initial (u). On pourrait du reste restreindre la famille considérée des objets (u) en imposant aux composantes $u_1, u_2, \cdots, u_r$ de satisfaire à certaines relations algébriques fixes, à une double condition :

1° les composantes $u_1, \cdots, u_r$ des objets de la famille restreinte ne satisfont à aucune relation linéaire à coefficients constants ;

2° les relations algébriques qui déterminent la famille restreinte doivent rester invariantes par les substitutions S de la représentation linéaire.

La famille d'objets ainsi obtenue sera dite un *tenseur euclidien* que nous conviendrons de dire attaché au point O. Deux tenseurs euclidiens seront dits équivalents s'ils proviennent de la même représentation linéaire du groupe des rotations ou de deux représentations linéaires équivalentes.

Par exemple le corps des vecteurs (d'origine O), le corps des vecteurs de longueur 1, le corps des vecteurs isotropes, constituent trois tenseurs équivalents ; si l'on représente chaque vecteur de l'un de ces corps par des composantes rapportées à un repère cartésien, le second corps est caractérisé par la relation $\Phi(x) = 1$, le troisième par la relation $\Phi(x) = 0$, en désignant par $\Phi(x)$ la forme fondamentale.

Il importe de remarquer que le tenseur est défini non par la nature des objets qui le composent, mais par le choix des composantes qui le définissent analytiquement. Par exemple un couple de vecteurs opposés $\overrightarrow{x}$ et $-\overrightarrow{x}$ *réels* peut être représenté analytiquement soit par les $\dfrac{n(n+1)}{2}$ monomes $x^i x^j$, soit par les

$\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{24}$ monomes $x^i x^j x^k x^h$; chacune de ces représentations analytiques définit un tenseur euclidien, et ces deux tenseurs ne sont pas équivalents.

Naturellement ce qui vient d'être dit pour le groupe des rotations pourrait être dit du groupe des rotations et des retournements, mais il importe de remarquer qu'un tenseur pour le groupe des rotations n'est pas nécessairement un tenseur pour le groupe des rotations et des retournements : nous en verrons un exemple bientôt (nº **51**). Il y aurait donc lieu de distinguer les tenseurs euclidiens au sens restreint, qui fournissent des représentations linéaires du groupe des rotations, et les tenseurs euclidiens au sens large, qui fournissent des représentations linéaires du groupe des rotations et des retournements. Dans un espace pseudo-euclidien réel, une classification plus poussée pourrait être faite, suivant qu'on considère le groupe des rotations propres, celui de toutes les rotations, celui des rotations et retournements propres, etc.

24. Autre point de vue. — On peut se placer à un point de vue un peu différent, qui est du reste celui où on se place d'habitude dans le calcul tensoriel. Reprenons les équations qui définissent une rotation $\mathcal{R}$ appliquée à un vecteur $\vec{x}$ rapporté à un repère cartésien donné R. Les équations de la substitution S qui représentent la rotation $\mathcal{R}$ peuvent être interprétées comme fournissant le passage des composantes x^i du vecteur aux composantes $(x^i)'$ du *même vecteur*, mais rapporté au repère R$'$ qui se déduit de R par la rotation $\mathcal{R}$. Dans cette conception on envisage donc la substitution S comme une opération de changement de coordonnées, la substitution S étant celle qui définit la rotation faisant passer de l'ancien repère au nouveau, *telle qu'elle s'exprime analytiquement quand on la rapporte à l'ancien repère.* Bien entendu il importe de remarquer que l'ancien et le nouveau repère sont *égaux* entre eux au point de vue du groupe des rotations. La représentation linéaire du groupe des rotations traduit donc les changements de coordonnées opérant sur les composantes d'un vecteur arbitraire, mais *les différents systèmes de coordonnées considérés n'étant pas des systèmes de coordonnées cartésiennes arbitraires* : ils doivent être tous équivalents par rapport au groupe des rotations, les repères correspondants étant directement égaux.

On pourrait considérer les formules qui donnent les changements subis par les composantes d'un vecteur quand on le rapporte à des repères cartésiens variables absolument arbitraires. Les substitutions linéaires ainsi obtenues ne fournissent pas une représentation linéaire du groupe des rotations, mais d'un groupe plus large, le groupe des *rotations affines*; elles se traduisent par des substitutions linéaires absolument arbitraires. De ce point de vue le vecteur, le p-vecteur sont des *tenseurs affines*, en ce sens qu'ils fournissent des représentations linéaires du groupe des rotations affines. C'est ainsi du reste qu'ils sont envisagés dans le calcul tensoriel classique.

II. — ALGÈBRE TENSORIELLE.

La notion de tenseur peut être généralisée à un groupe quelconque G ; un tenseur relatif à G peut être défini par une représentation linéaire de G, mais les êtres que représente ce tenseur peuvent être susceptibles de plusieurs interprétations concrètes.

Quel que soit le groupe G envisagé, le calcul tensoriel comporte certaines opérations simples et satisfait à certains théorèmes généraux que nous allons rapidement indiquer.

25. Addition de deux tenseurs équivalents. — Etant donnés deux tenseurs équivalents de composantes $x^1, \cdots, x^r$ et $y^1, \cdots, y^r$, ces composantes étant choisies de manière qu'à une opération quelconque de G corresponde la même substitution linéaire sur les variables x^i et les variables y^i, on appelle somme des deux tenseurs le tenseur de composantes $x^i + y^i$; cette somme constitue un tenseur équivalent aux tenseurs donnés. Plus généralement les quantités $mx^i + ny^i$, où m et n désignent deux constantes fixes, définissent un tenseur équivalent aux tenseurs donnés.

26. Multiplication de deux tenseurs quelconques.— Etant donnés deux tenseurs, équivalents ou non, de composantes $x^1, x^2, \cdots, x^r$ et $y^1, y^2, \cdots, y^s$, on appelle *produit* de ces tenseurs le tenseur de composantes $x^i y^j$.

27. Quelques théorèmes fondamentaux. — THÉORÈME I. — *Soient $x^1, x^2, \cdots, x^r$ les composantes d'un tenseur, $y_1, y_2, \cdots, y_r$ des*

variables qui se transforment par les opérations du groupe G *de manière à laisser invariante la somme* $x^i y_i$; *les* r *quantités* y_i *définissent un tenseur dont la nature ne dépend que de la nature du premier tenseur* [1].

En effet soient

$$(x^i)' = a^i{}_k x^k$$

les substitutions linéaires que subissent les composantes x^i par une opération de G ; les transformations $y_i \to y'_i$ subies par les quantités y_i satisfont à l'identité

$$a^i{}_k x^k y_i' = x^k y_k,$$

d'où

$$y_k = a^i{}_k y'_i ;$$

il en résulte que les y'_i se déduisent des y_k par une substitution linéaire, qui ne dépend que de la substitution linéaire effectuée sur les x_i. C. Q. F. D.

THÉORÈME II.— *Soient* $x^1, x^2, \cdots, x^r$ *les composantes d'un tenseur,* $y^1, y^2, \cdots, y^s$ *des quantités qui se transforment par les opérations du groupe G de manière que les* h *expressions*

$$z_\alpha \equiv c^k{}_{i\alpha} x^i y_k \qquad (\alpha = 1, 2, \cdots, h)$$

se tranforment comme les composantes d'un tenseur : dans ces conditions les hr *quantités* $c^k_{i\alpha} y_k$ $(i = 1, 2, \cdots, r ; \alpha = 1, 2, \cdots, h)$ *forment un tenseur dont la nature ne dépend que de la nature du tenseur* (x) *et du tenseur* (z). *Le degré de ce tenseur est égal au nombre des formes linéaires* $c^k_{i\alpha} y^k$ *indépendantes.*

Supposons en effet que, par une opération de G, les x^i et les z_α subissent les substitutions linéaires

$$(x^i)' = a^i{}_j x^j,$$
$$z'_\alpha = b^\lambda_\alpha z_\lambda :$$

on aura

$$c^k_{i\alpha} a^i_j x^j y'_k = b^\lambda_\alpha c^k_{i\lambda} x^i y_k,$$

d'où

$$c^k_{i\alpha} a^i_j y'_k = b^\lambda_\alpha c^k_{j\lambda} y_k \qquad (\alpha = 1, 2, \cdots, h ; j = 1, 2, \cdots, r).$$

Ces équations peuvent être résolues par rapport aux quantités

---

[1] Nous disons que deux tenseurs sont de même nature s'ils sont équivalents.

$c^k_{i\alpha} y'_k$ qui sont alors exprimées linéairement au moyen des $c^k_{j\beta} y_k$.

C. Q. F. D.

28. Applications. — Nous avons vu (nº **19**) que toute rotation infinitésimale dépendait de $\frac{n(n-1)}{2}$ quantités $a_{ij} = - a_{ji}$, la vitesse v_i du point x^i étant le vecteur

$$v_i = a_{ik} x^k.$$

Nous avons dit que les quantités a_{ij} pouvaient être regardées comme les composantes d'un bivecteur. En réalité nous ne l'avions pas démontré ; nous ne nous étions pas assurés que les a_{ij} par une rotation appliquée simultanément au vecteur $\vec{x}$ et à sa vitesse $\vec{v}$ se transformaient comme les composantes d'un bivecteur. Or considérons un vecteur arbitraire $\vec{y}$ et le produit scalaire $\vec{y} \cdot \vec{v} = a_{ik} y^i x^k$. Cette somme est un invariant ; d'autre part les quantités $y^i x^k$ constituent un tenseur, donc il en est de même des a_{ik} (Théorème I) et la loi de transformation des a_{ik} ne dépend que de la loi de transformation des $y^i x^k$. D'autre part soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs arbitraires, la somme

$$(u_i v_k - v_i u_k) y^i x^k = u_i y^i v_k x^k - v_i y^i u_k x^k$$

est un invariant : donc les quantités $u_i v_k - v_i u_k$ se transforment comme les a_{ik} et elles constituent les composantes d'un bivecteur simple : *donc la rotation infinitésimale constitue un tenseur équivalent à un bivecteur.*

III. — TENSEURS IRRÉDUCTIBLES ET TENSEURS RÉDUCTIBLES.

29. Définitions. — Un tenseur relatif à un groupe G est dit *réductible* si, étant à r composantes $u_1, u_2, \cdots, u_r$, il est possible de former $\rho < r$ combinaisons linéaires, à coefficients *complexes* constants, de ces composantes, qui possèdent pour elles-mêmes le caractère tensoriel, c'est-à-dire qui soient transformées linéairement entre elles par toute opération du groupe G.

Tout tenseur qui n'est pas réductible est dit *irréductible.*

Un tenseur est dit *complètement réductible* s'il est possible, au moyen d'un changement linéaire préalable effectué sur les com-

posantes, de partager celles-ci en un certain nombre de suites

$$\begin{array}{l} x_1, x_2, \cdots, x_p\,; \\ y_1, y_2, \cdots, y_q\,; \\ z_1, z_2, \cdots, z_r\,; \\ \cdots\cdots\cdots\cdots, \end{array}$$

de telle sorte que les composantes de chaque suite soient transformées linéairement entre elles, et cela d'une manière irréductible.

Il est clair que si un tenseur est irréductible, tout tenseur équivalent est également irréductible ; il en est de même en ce qui concerne la complète réductibilité.

Un tenseur relatif à un groupe G fournissant une représentation linéaire du groupe G fournit par cela même une représentation linéaire de tout sous-groupe g de G ; il est donc aussi un tenseur relatif à g ; s'il est irréductible par rapport à G, il l'est évidemment aussi par rapport à g, mais la réciproque n'est pas toujours vraie. Nous avons déjà cité l'exemple où G est le groupe des rotations et des retournements, g étant le groupe des rotations.

30. Un critère d'irréductibilité. — On peut présenter la notion d'irréductibilité d'une autre manière. Regardons les r composantes du tenseur considéré comme les composantes d'un vecteur dans un espace à r dimensions. Si le tenseur donné est réductible, c'est qu'il existe $\rho < r$ combinaisons linéaires des r quantités u_i qui se transforment linéairement entre elles par l'effet des opérations de G. Cela revient à dire que la variété linéaire (II) passant par l'origine obtenue en annulant ces ρ formes est invariante par les opérations de G. Réciproquement si G laisse invariante une variété linéaire (II) passant par l'origine, les premiers membres des équations linéaires qui définissent (II) sont transformés linéairement entre eux par les substitutions S et le tenseur est réductible. *Pour qu'un tenseur soit irréductible, il faut donc et il suffit que les substitutions S ne laissent invariante aucune variété linéaire passant par l'origine.*

31. Une propriété des tenseurs irréductibles. — On peut déduire de là une propriété des tenseurs irréductibles qui nous sera utile plus loin. Représentons encore chaque tenseur particulier du corps considéré de tenseurs par un vecteur $\vec{u}$ d'un espace E_r à r

dimensions. On n'obtient pas nécessairement ainsi tous les vecteurs de E_r, mais comme il n'existe aucune relation linéaire et homogène entre les composantes $u_1, u_2, \cdots, u_r$ des tenseurs du corps, tout vecteur de E_r peut être obtenu comme combinaison linéaire de vecteurs représentatifs des tenseurs du corps. Cela posé supposons le tenseur irréductible et appliquons au vecteur $\overrightarrow{u_0}$ représentatif d'un tenseur particulier du corps toutes les opérations de G. Nous obtenons une certaine famille de vecteurs. Ces *vecteurs ne peuvent pas être tous dans une même variété linéaire* (Π) *passant par l'origine*. Si en effet, ce qu'on peut naturellement supposer, (Π) est la plus petite de ces variétés linéaires, tout vecteur $\overrightarrow{u}$ de la variété (Π) est une combinaison linéaire d'un certain nombre de vecteurs de la famille, par exemple des vecteurs qui se déduisent de $\overrightarrow{u_0}$ par les substitutions $S_1, S_2, \cdots, S_p$. Si on applique à ce vecteur $\overrightarrow{u}$ l'opération de G qui se traduit par la substitution S, on obtiendra la même combinaison linéaire des vecteurs $SS_1\overrightarrow{u_0}$, $SS_2\overrightarrow{u_0}, \cdots, SS_p\overrightarrow{u_0}$, vecteurs tous par hypothèse situés dans (Π). Par suite les substitutions S laissent invariante la variété (Π) et cela n'est possible, le tenseur étant irréductible, que si la variété (Π) est confondue avec l'espace tout entier. C. Q. F. D.

32. Problème. — Soit un tenseur irréductible à r composantes $u_1, u_2, \cdots, u_r$. Est-il possible de faire un changement linéaire de composantes (changement de base) de telle sorte que les nouvelles composantes subissent, par toute opération du groupe G, la même substitution linéaire S que les anciennes ? Soit σ la substitution linéaire qui fait passer des anciennes composantes aux nouvelles : on doit avoir, pour toutes les substitutions S,

(1) $$\sigma S \sigma^{-1} = S \qquad \text{ou} \qquad \sigma S = S\sigma.$$

Il existe toujours dans l'espace E_r des vecteurs $\overrightarrow{u}$ un vecteur $\overrightarrow{u_0}$ que l'opération σ reproduit multiplié par un nombre m. Soient en effet

$$v_i = c_i{}^k u_k$$

les équations qui définissent σ ; nous avons à chercher r nombres u_i satisfaisant à

$$c_i{}^k u_k = m u_i \qquad (i = 1, 2, \cdots, r).$$

Cela est possible sous la seule condition que le déterminant

$$\begin{vmatrix} c_1^1 - m & c_1^2 & \cdots & c_1^r \\ c_2^1 & c_2^2 - m & \cdots & c_2^r \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_r^1 & c_r^2 & \cdots & c_r^r - m \end{vmatrix}$$

soit nul : il suffira de prendre pour m une racine de ce polynome.

Cela posé l'existence de la relation

$$\sigma \overrightarrow{u_0} = m \overrightarrow{u_0}$$

et des relations (1) entraîne

$$\sigma(\mathrm{S}\overrightarrow{u_0}) = \mathrm{S}(\sigma\overrightarrow{u_0}) = m(\mathrm{S}\overrightarrow{u_0})\ ;$$

l'opération σ reproduit donc les vecteurs $\mathrm{S}\,\overrightarrow{u_0}$ en les multipliant par m. Mais le tenseur étant irréductible, tout vecteur de l'espace E_r est une combinaison linéaire des vecteurs $\mathrm{S}\,\overrightarrow{u_0}$ et par suite se reproduit multiplié par m. On a donc $v_i = mu_i$.

Théorème. — *Le seul changement linéaire de variables qui laisse invariantes toutes les substitutions d'une représentation linéaire irréductible d'un groupe* G *consiste à multiplier toutes ces variables par un même facteur constant m.*

33. Recherche des tenseurs irréductibles qu'on peut extraire d'un tenseur complètement réductible. — Appliquons ce qui précède à la résolution du problème suivant. Soit un tenseur complètement réductible par rapport à un groupe G. Supposons par exemple que par un choix convenable des composantes il se décompose en cinq tenseurs irréductibles dont les trois premiers soient équivalents entre eux, ainsi que les deux derniers. Désignons respectivement par

$$\begin{gathered} x_1, x_2, \cdots, x_p, \\ y_1, y_2, \cdots, y_p, \\ z_1, z_2, \cdots, z_p, \\ u_1, u_2, \cdots, u_q, \\ v_1, v_2, \cdots, v_q, \end{gathered}$$

les composantes de ces cinq tenseurs. Nous pouvons supposer les composantes x_i, y_i, z_i choisies de telle manière que les substitutions linéaires subies par les x_i, y_i, z_i soient identiques : de même pour les u_i et les v_i.

Cela posé cherchons tous les tenseurs irréductibles qu'on peut extraire du tenseur complètement réductible donné. Les composantes d'un tel tenseur seront des combinaisons linéaires des x_i, y_i, z_i, u_i, v_i. Soit

$$\Sigma a_i x_i + \Sigma b_j y_j + \Sigma c_k z_k + \Sigma h_\alpha u_\alpha + \Sigma k_\beta v_\beta$$

une de ces composantes. Si l'un des coefficients a_i est différent de zéro, il est impossible que toutes les composantes x_i fassent défaut dans une autre des combinaisons linéaires qui constituent le tenseur cherché : sinon en effet l'ensemble de toutes les combinaisons linéaires où ne figure aucune des lettres x_i posséderait par lui-même le caractère tensoriel. Les différentes quantités $\Sigma a_i x_i$ d'autre part se transforment linéairement entre elles, et comme les x_i forment un tenseur irréductible, il en résulte que le tenseur cherché contient exactement p composantes indépendantes qui peuvent être mises sous la forme

$$\begin{array}{l} x_1 + \cdots, \\ x_2 + \cdots, \\ \cdots\cdots\cdots, \\ x_p + \cdots; \end{array}$$

les points représentant des combinaisons linéaires des variables y_i, z_i, u_i, v_i. Les p combinaisons linéaires des y_i qui y figurent (à supposer qu'elles ne soient pas toutes nulles) se transforment alors comme $x_1, x_2, \cdots, x_p$; par suite (n° **32**), elles sont nécessairement de la forme my_1, my_2, $\cdots$, my_p. Résultat analogue pour les combinaisons linéaires des z_i. Quant aux variables u_i, elles ne peuvent figurer, car les p combinaisons linéaires qui figureraient se transformeraient entre elles comme les x_i : il faudrait donc $q = p$ et de plus que les u_i forment un tenseur équivalent aux x_i, contrairement à l'hypothèse.

34. Application. — Déduisons de ce qui précède un résultat important. Supposons qu'on ait une classe d'objets transformés entre eux par les opérations du groupe G, et qu'on puisse attacher à chaque objet de la classe un certain nombre r de quantités u_α de telle sorte

1° que par toute opération de G les u_α subissent une substitution linéaire déterminée S ;

2° que les substitutions linéaires S fournissent une représen-

tation linéaire de G. Peut-il exister entre les u_α une ou plusieurs relations linéaires à coefficients constants ?

L'hypothèse revient à dire que dans un certain espace E_r à r dimensions les vecteurs $\overrightarrow{x}$ définissent par leurs r composantes x_α un certain tenseur $\mathfrak{T}$. Les vecteurs $\overrightarrow{u}$ attachés aux objets de la classe forment seulement une partie des vecteurs $\overrightarrow{x}$ de E_r. Mais les substitutions S les transforment entre eux : par suite le plus petit sous-espace linéaire contenant les vecteurs $\overrightarrow{u}$ est invariant par les substitutions S. Les premiers membres des équations qui définissent ce sous-espace constituent donc un tenseur, extrait de $\mathfrak{T}$. Par suite *les relations linéaires qui existent entre les u_α s'obtiennent en annulant toutes les composantes d'un certain tenseur extrait de* $\mathfrak{T}$.

Supposons par exemple que le tenseur $\mathfrak{T}$ se décompose en trois tenseurs irréductibles équivalents entre eux et supposons que les composantes

$$\begin{array}{ll} x_1, & x_2, \cdots, x_\rho, \\ y_1, & y_2, \cdots, y_\rho, \\ z_1, & z_2, \cdots, z_\rho, \end{array}$$

de ces trois tenseurs aient été choisies de manière que les x_i, les y_i et les z_i subissent la même substitution linéaire par toute opération de G. Les relations cherchées s'obtiendront en écrivant un ou plusieurs systèmes de ρ relations de la forme

$$ax_i + by_i + cz_i = 0 \qquad (i = 1, 2, \cdots, \rho),$$

a, b, c étant des coefficients constants.

35. Un théorème remarquable. — Appliquons le résultat précédent à la démonstration d'un théorème célèbre.

Théorème de Burnside [1]. — *Il ne peut exister aucune relation linéaire à coefficients constants entre les coefficients des différentes substitutions* S *formant une représentation linéaire irréductible d'un groupe* G.

Soit une représentation linéaire de degré n dont nous désigne-

---

London Math. Soc. Proc. 3, 1905, p. 430.

rons par u_i^j les coefficients de la substitution générique S :

$$x'_i = u_i^k x_k \qquad (i = 1, 2, \cdots, n).$$

Si A est une substitution particulière de la représentation, $S' = AS$ en sera une autre et on passe des u_i^j aux $(u_i^j)'$ par des relations

$$(2) \qquad (u_i^j)' = a_i^k \, u_k^j.$$

A chaque opération a de G correspond donc une substitution linéaire (2) portant sur les n^2 quantités u_i^j ; cette substitution linéaire constitue une représentation linéaire du groupe G ; car aux opérations successives a et b de G correspondent les opérations successives

$$S' = AS, \qquad S'' = BS' = (BA)S.$$

Cela posé nous sommes dans le cas d'application du théorème du numéro précédent. Or si dans les équations (2) on donne à j une valeur fixe, on voit que les quantités $u_1^j, u_2^j, \cdots, u_n^j$ se transforment comme le font les variables du tenseur donné par l'effet de la substitution A ; comme le tenseur donné est irréductible, il en résulte que le tenseur u_i^j se décompose en n tenseurs irréductibles, équivalents entre eux. Par suite toutes les relations linéaires entre les u_i^j s'obtiendront en écrivant un ou plusieurs systèmes de n équations de la forme

$$m_1 u_i^1 + m_2 u_i^2 + \cdots + m_n u_i^n = 0 \qquad (i = 1, 2, \cdots, n),$$

les m_k étant des constantes. Mais de telles relations sont impossibles, car le déterminant de la substitution S serait nul. Le théorème est donc démontré.

Prenons par exemple le groupe des rotations du plan réel appliquées aux vecteurs :

$$x' = x \cos \alpha - y \sin \alpha,$$
$$y' = x \sin \alpha + y \cos \alpha ;$$

comme les coefficients de la substitution ne sont pas linéairement indépendants, le vecteur ne peut être un tenseur irréductible. En effet il se décompose dans les deux *semi-vecteurs* à 1 composante $x + iy$ et $x - iy$.

36. Un critère d'irréductibilité. — Nous pouvons déduire du théorème de Burnside un critère d'irréductibilité d'une représentation linéaire.

THÉORÈME. — *Pour qu'une représentation linéaire d'un groupe* G *quelconque soit irréductible, il faut et il suffit qu'il n'existe aucune relation linéaire à coefficients constants non tous nuls entre les coefficients des différentes substitutions qui définissent la représentation donnée.*

La condition est nécessaire d'après le théorème de Burnside. Elle est évidemment suffisante, car si elle est remplie, on ne peut extraire du tenseur donné $\mathfrak{T}$ de degré r aucun tenseur $\mathfrak{T}'$ de degré inférieur ρ, car si on prenait comme ρ premières composantes de base de $\mathfrak{T}$ celles de $\mathfrak{T}'$, les coefficients des $r-\rho$ dernières variables dans les premiers membres des ρ équations de la substitution S seraient tous nuls.

IV. — MATRICES.

37. Définition. — Toute substitution linéaire S portant sur n variables x_i, soit

$$x'_i = a_i^k x_k \qquad (i = 1, 2, \cdots, n),$$

peut être représentée par une *matrice* ou tableau carré à n lignes et n colonnes des coefficients de la substitution. Nous désignerons encore cette matrice par la notation S. Si l'on effectue sur les variables transformées par S une nouvelle substitution S'

$$x''_i = b_i^k x'_k,$$

la substitution résultante $S'' = S'S$ est définie par les formules

$$x''_i = b_i^k a_k^h x_h.$$

On en déduit une *loi de composition* des matrices, les éléments c_i^j de la matrice $S'' = S'S$ étant

$$c_i^j = b_i^k a_k^j.$$

Plus généralement on peut considérer des matrices rectangulaires et définir le produit S'S par les formules précédentes, *à condition que le nombre des colonnes de* S' *soit égal au nombre des lignes de* S. En particulier si l'on représente par x la matrice à n lignes et 1 colonne dont les éléments sont $x_1, x_2, \cdots, x_n$, et par x' la matrice analogue résultant d'une substitution S, on a

$$x' = Sx.$$

38. Addition, multiplication par m. — On appelle somme de deux matrices S et S' ayant les mêmes nombres de lignes et de

colonnes, et on désigne par $S + S'$, la matrice dont les éléments s'obtiennent en ajoutant les éléments de mêmes rangs de S et de S'.

Le produit par un nombre m d'une matrice S, que nous désignerons par mS, est la matrice obtenue en multipliant par m les différents éléments de S.

39. Remarque sur le calcul d'un produit de matrices. — Il importe de faire ici une observation relative au calcul du produit S'S de deux substitutions linéaires. On pourrait être tenté, pour obtenir la variable x''_i résultant de la substitution S'S, de calculer d'abord la variable $x'_i = a_i^k x_k$ résultant de la substitution S, puis, dans la forme linéaire en $x_1, \cdots, x_n$ ainsi obtenue, de remplacer chaque x_k par sa transformée par S', c'est-à-dire par $b_k^h x_h$. Mais le résultat *serait faux* ; on aurait en effet

$$x''_i = a_i^k b_k^h x_h,$$

au lieu de

$$x''_i = b_i^k a_k^h x_h.$$

On voit facilement que si l'on veut employer le procédé précédent, il importe d'appliquer les opérations S'S dans l'ordre inverse de l'ordre indiqué, en effectuant d'abord l'opération S', puis l'opération S. Le résultat serait analogue pour le produit d'un nombre quelconque de substitutions.

40. Matrices transposées, matrices inverses. — On appelle *matrice transposée* d'une matrice S, et on désigne par S^*, la matrice qui se déduit de S par l'échange des lignes et des colonnes. La matrice x^* est donc la matrice à 1 ligne et n colonnes d'éléments $x_1, x_2, \cdots, x_n$.

L'égalité $S'' = S'S$ subsiste quand on remplace chaque matrice par sa transposée, mais sous la forme

$$S''^* = S^* S'^* ;$$

en particulier la formule $x' = Sx$ peut s'écrire $x'^* = x^* S^*$.

On appelle *matrice inverse* d'une matrice carrée donnée S de déterminant non nul, et on désigne par S^{-1}, la matrice représentative de la substitution linéaire inverse de la substitution représentée par S. On a

$$SS^{-1} = S^{-1}S = 1,$$

en désignant par 1 (quand aucune ambiguïté n'est à craindre) la matrice dont tous les éléments sont nuls sauf ceux de la diagonale principale égaux à 1. On a, quelle que soit S,

$$1S = S1 = S.$$

On appelle *matrice diagonale* une matrice carrée dont tous les éléments non situés sur la diagonale principale sont nuls.

41. Matrices semblables. — Nous avons vu (nos **20, 22**) que si dans une substitution linéaire S on fait subir aux variables primitives et aux variables transformées une même substitution linéaire A, on obtient la substitution ASA^{-1}. Nous dirons d'une manière générale que la transformée de la matrice carrée S par la matrice carrée A de déterminant non nul et de même ordre est la matrice $S' = ASA^{-1}$; nous dirons encore que les matrices S et ASA^{-1} sont *semblables*.

Deux matrices carrées semblables ont le même déterminant. La matrice transformée de S′S par la matrice A est le produit des matrices transformées de S et de S′ : cela résulte de l'égalité

$$A(S'S)A^{-1} = (AS'A^{-1})(ASA^{-1}).$$

De même l'inverse de la transformée de S est la transformée de l'inverse de S, comme cela résulte de la relation

$$(ASA^{-1})(ASA^{-1})^{-1} = (ASA^{-1})(AS^{-1}A^{-1}) = ASS^{-1}A^{-1} = 1.$$

42. Equation caractéristique. Valeurs propres. — On appelle *équation caractéristique* d'une matrice carrée S l'équation en λ obtenue en annulant le déterminant de la matrice $S - \lambda$ qu'on obtient en retranchant λ de tous les éléments de la diagonale principale (ou la matrice carrée de même ordre que S produit de λ par la matrice unité). Les racines de l'équation caractéristique sont les *valeurs propres* de la matrice S.

Deux matrices semblables S et ASA^{-1} ont la même équation caractéristique. Cela résulte des relations

$$ASA^{-1} - \lambda = A(S - \lambda)A^{-1},$$

d'où

$$| ASA^{-1} - \lambda | = | A | \, | S - \lambda | \, | A^{-1} | = | S - \lambda | .$$

Dire que λ_0 est une valeur propre de S, considérée comme représentant une substitution linéaire dans un espace vectoriel E_n,

c'est dire qu'il existe un vecteur $\overrightarrow{x}$ non nul tel que S reproduise ce vecteur multiplié par λ_0 :

$$S\overrightarrow{x_0} = \lambda \overrightarrow{x_0}.$$

43. Matrices unitaires. — Une matrice carrée à éléments complexes U est dite *unitaire* si la substitution linéaire qu'elle représente laisse invariante la somme des carrés des modules des variables, ou encore le produit $\bar{x}^*x$ où $\bar{x}$ est la matrice à 1 colonne et n lignes complexe conjuguée de x. Or on a

$$\overline{x'}^* x' = \bar{x}^* \overline{U}^* U x\ ;$$

la condition pour qu'une matrice carrée soit unitaire est donc

$$\overline{U}^* U = 1 \qquad \text{ou} \qquad \overline{U}^* = U^{-1} :$$

la transposée de la complexe conjuguée de U *est égale à l'inverse de* U.

Théorème. — *Toute matrice unitaire est transformable par une matrice unitaire de manière à devenir diagonale avec des éléments tous de module* 1.

Avant de démontrer ce théorème, convenons de définir le produit scalaire de deux vecteurs x et y par la quantité $\bar{x}^*y$. Ce produit scalaire se change en son conjugué quand on change l'ordre des vecteurs : le carré scalaire d'un vecteur est égal à la somme des carrés des modules de ses composantes : il ne peut donc être nul que si le vecteur est nul. Deux vecteurs sont dits rectangulaires si leur produit scalaire est nul. Remarquons enfin que toute matrice unitaire U laisse invariant le produit scalaire de deux vecteurs : on a en effet

$$\bar{x}'^* y' = \bar{x}^* \overline{U}^* U y = \bar{x}^* y.$$

Cela posé soit λ une valeur propre de U : il existe un vecteur x non nul que la matrice U reproduit multiplié par λ :

$$Ux = \lambda x ;$$

par transposition et passage au complexe conjugué, on en déduit

$$\bar{x}^* \overline{U}^* = \bar{\lambda} \bar{x}^*,$$

d'où par multiplication

$$\bar{x}^* \overline{U}^* U x = \bar{x}^* x = \lambda \bar{\lambda} \bar{x}^* x, \qquad \text{d'où} \qquad \bar{\lambda}\lambda = 1.$$

Toutes les valeurs propres de U *sont donc de module égal à* 1.

Remarquons d'autre part que *la transformée de* U *par une matrice unitaire* C *est encore unitaire* :

$$(\overline{C}\overline{U}\overline{C}^{-1})^* = \overline{C}^{*-1}\overline{U}^*\overline{C}^* = CU^{-1}C^{-1} = (CUC^{-1})^{-1}.$$

Désignons maintenant par $\vec{e_1}$ un vecteur, qu'on peut supposer unitaire, que la matrice U reproduit multiplié par λ_1 ; la matrice U laisse invariant le sous-espace lieu des vecteurs perpendiculaires à $\vec{e_1}$; il existe dans ce sous-espace au moins un vecteur $\vec{e_2}$, qu'on peut supposer unitaire, que U reproduit multiplié par λ_2. La matrice U laisse invariant le sous-espace lieu des vecteurs perpendiculaires à $\vec{e_1}$ et $\vec{e_2}$; dans ce sous-espace il existe au moins un vecteur $\vec{e_3}$, qu'on peut supposer unitaire, que U reproduit multiplié par λ_3, et ainsi de suite. On arrive ainsi à une nouvelle base $\vec{e_1}, \vec{e_2}, \cdots, \vec{e_n}$. Tout vecteur est de la forme

$$y_1 \vec{e_1} + y_2 \vec{e_2} + \cdots + y_n \vec{e_n},$$

et on vérifie facilement que le carré scalaire de ce vecteur est $y_1\overline{y_1} + \cdots + y_n\overline{y_n}$; la transformation C qui fait passer des x_i aux y_i est donc unitaire, et la matrice U′ agissant sur les y_i, qui est transformée de U par C, transforme le vecteur $\Sigma y_i\vec{e_i}$ en $\Sigma\lambda_i y_i\vec{e_i}$: elle est donc diagonale, ses éléments étant les λ_i, tous de module égal à 1.

C.Q.F.D.

44. Matrices orthogonales. — Une matrice carrée O est dite orthogonale si la substitution linéaire qu'elle représente laisse invariante la somme des carrés des variables, ou encore la quantité x^*x. L'égalité

$$x^*O^*Ox = x^*x$$

donne

$$O^*O = 1, \qquad \text{ou} \qquad O^* = O^{-1} :$$

la transposée d'une matrice orthogonale est égale à son inverse.

Si la matrice orthogonale est à éléments *réels*, elle est unitaire. La réduction faite au numéro précédent introduisait n vecteurs $\vec{e_1}, \cdots, \vec{e_n}$, imaginaires si la valeur propre correspondante est imaginaire, réels si elle est réelle (égale alors à ± 1) ; de plus la somme des carrés des modules de leurs composantes était égale à 1. Prenons l'un d'eux, $\vec{e_1}$ par exemple, et supposons-le imaginaire :

$\vec{e}_1 = \vec{\eta}_1 + i\vec{\eta}_2$, $\vec{\eta}_1$ et $\vec{\eta}_2$ étant réels. On voit que $\vec{\eta}_1$ et $\vec{\eta}_2$ sont deux vecteurs unitaires réels orthogonaux, et l'on a

$$\begin{aligned} O\eta_1 &= \cos\alpha\eta_1 - \sin\alpha\eta_2, \\ O\eta_2 &= \sin\alpha\eta_1 + \cos\alpha\eta_2. \end{aligned}$$

La matrice O laisse invariante la variété linéaire lieu des vecteurs perpendiculaires à $\vec{\eta}_1$ et $\vec{\eta}_2$; de plus elle transforme les vecteurs de cette variété d'une manière orthogonale. On pourra donc trouver deux vecteurs unitaires $\vec{\eta}_3$ et $\vec{\eta}_4$ orthogonaux entre eux ainsi qu'à $\vec{\eta}_1$ et $\vec{\eta}_2$ transformés d'une manière analogue avec un angle β et ainsi de suite. Aux valeurs propres réelles ± 1 de la matrice O correspondront des vecteurs qui se reproduisent au signe près.

Finalement on voit qu'en transformant la matrice O par une matrice orthogonale réelle C, on peut la réduire à une matrice analogue à la suivante :

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\beta & -\sin\beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sin\beta & \cos\beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix};$$

le déterminant d'une telle matrice est égal à ± 1 ; la matrice est dite *orthogonale directe* si le déterminant est égal à $+1$.

45. Application à la décomposition d'une rotation réelle. — Le résultat précédent donne des propriétés intéressantes du groupe des rotations et des retournements de l'espace euclidien réel. Dans un tel espace rapporté à un repère rectangulaire les opérations se traduisent par des matrices orthogonales réelles. Appelons *rotation simple* celle qui par un choix convenable des coordonnées rectangulaires laisse invariantes toutes les coordonnées sauf deux x_i et x_j, transformées par les formules

$$\begin{aligned} x'_i &= x_i \cos\alpha - x_j \sin\alpha, \\ x'_j &= x_i \sin\alpha + x_j \cos\alpha ; \end{aligned}$$

α est l'angle de la rotation simple et le biplan formé par $\vec{e}_i$ et $\vec{e}_j$ le biplan de la rotation simple. Nous pouvons alors énoncer le théorème suivant :

Toute rotation est le produit d'un certain nombre $\leqslant \frac{n}{2}$ *de rotations simples dont les biplans sont totalement perpendiculaires entre eux ; tout retournement est le produit d'un certain nombre* $\leqslant \frac{n-1}{2}$ *de rotations simples de la même nature et d'une symétrie par rapport à un hyperplan contenant les biplans de toutes ces rotations simples.*

46. Matrices hermitiennes. — Une matrice carrée H est dite une matrice hermitienne si sa transposée est égale à sa complexe conjuguée :

$$H^* = \overline{H}.$$

La transformée d'une matrice hermitienne H par une matrice unitaire C est encore hermitienne : cela résulte de l'égalité

$$(C^{-1})^* H^* C^* = C \overline{H} \overline{C}^{-1}.$$

THÉORÈME. — *On peut toujours transformer une matrice hermitienne* H *par une matrice unitaire de manière à la rendre diagonale à éléments réels.*

Montrons d'abord que toute valeur propre de H est réelle. L'égalité

$$Hx = \lambda x$$

entraîne, en prenant les complexes conjugués des transposés des deux membres,

$$\overline{x}^* H = \overline{\lambda} \overline{x}^* ;$$

en multipliant les deux membres de la première relation à gauche par $\overline{x}^*$ et les deux membres de la seconde à droite par x, on obtient

$$\overline{x}^* Hx = \lambda \overline{x}^* x = \overline{\lambda} \overline{x}^* x,$$

d'où $\overline{\lambda} = \lambda$.

Cela posé introduisons dans l'espace vectoriel dans lequel opère H la métrique unitaire d'après laquelle le produit scalaire de deux vecteurs $\overrightarrow{x}$, $\overrightarrow{y}$ est $\overline{x}^* y$. Il existe au moins un vecteur unitaire $\overrightarrow{e_1}$ que H reproduit multiplié par un facteur réel λ_1. Tout vecteur $\overrightarrow{x}$ perpendiculaire à $\overrightarrow{e_1}$ se transforme alors en un vecteur $\overrightarrow{x'}$ perpendiculaire à e_1 : cela résulte de ce que

$$\overline{e_1}^* x' = \overline{e_1}^* Hx = \overline{\lambda}_1 \overline{e_1}^* x.$$

Le sous-espace lieu des vecteurs perpendiculaires à $\overrightarrow{e_1}$ étant inva-

riant par H contient au moins un vecteur unitaire $\vec{e_2}$ que H reproduit multiplié par le facteur réel λ_2. En continuant le raisonnement, on arrive à un système de n vecteurs unitaires $\vec{e_1}, \vec{e_2}, \cdots, \vec{e_n}$, rectangulaires deux à deux, que H reproduit multipliés respectivement par $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$. En prenant ces vecteurs comme vecteurs de base, cela revient à transformer H, par une matrice unitaire C, en une matrice diagonale d'éléments $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$. C.Q.F.D.

47. Remarque. — Le produit de deux matrices unitaires du même ordre est une matrice unitaire : le produit de deux matrices orthogonales est une matrice orthogonale. Mais le produit de deux matrices hermitiennes n'est pas en général une matrice hermitienne. Pour que la matrice HH′ soit hermitienne, il faut et il suffit que l'on ait

$$H'^{*}H^{*} = \overline{H}\,\overline{H}' \quad \text{ou} \quad H'H = HH',$$

c'est-à-dire que les deux matrices commutent entre elles. L'ensemble des substitutions linéaires unitaires, ainsi que l'ensemble des substitutions orthogonales, forme donc un groupe, mais non l'ensemble des substitutions hermitiennes.

En revanche la somme de deux matrices hermitiennes est une matrice hermitienne ; mais cette propriété n'appartient ni aux matrices unitaires, ni aux matrices orthogonales.

V. — L'IRRÉDUCTIBILITÉ DES P-VECTEURS.

Nous allons terminer ce Chapitre en étudiant les multivecteurs au point de vue de leur irréductibilité par rapport au groupe des rotations. Nous nous placerons d'abord dans un espace euclidien réel rapporté à un repère rectangulaire, mais les raisonnements s'appliqueront sans changement à un espace complexe.

48. Irréductibilité du p-vecteur par rapport au groupe des rotations ($n \neq 2p$). — Désignons par σ_i la symétrie associée au vecteur de base $\vec{e_i}$. Si le p-vecteur était réductible, il existerait un tenseur $\mathcal{T}$ de degré $r < C^p_n$ dont les composantes seraient des combinaisons linéaires des composantes $x_{i_1 i_2 \cdots i_p}$(1) du p-vecteur. Sup-

(1) Nous désignerons dorénavant par $x_{i_1 i_2 \cdots i_p}$ les composantes d'un p-vecteur (au lieu de la notation $P_{i_1 i_2 \cdots i_p}$ précédemment introduite au nº 15).

posons que dans l'une de ces composantes le coefficient de $x_{12\cdots p}$ ne soit pas nul. La rotation $\sigma_1\sigma_2$ donnerait une nouvelle composante de $\mathfrak{T}$ qui se déduirait de la première en changeant les signes des coefficients des $x_{i_1 i_2 \cdots i_p}$ qui contiennent un et un seul des indices 1 et 2 : par addition on éliminerait ces quantités. En utilisant de même les rotations $\sigma_1\sigma_3, \cdots, \sigma_1\sigma_p$, on arriverait à une composante de $\mathfrak{T}$ contenant $x_{12\cdots p}$ et les seules quantités $x_{i_1 i_2 \cdots i_p}$ qui ne contiennent aucun des indices $1, 2, \cdots, p$. En utilisant enfin $\sigma_1\sigma_{p+1}, \cdots, \sigma_1\sigma_n$, on montrerait l'existence d'une composante de $\mathfrak{T}$ ne contenant, avec $x_{12\cdots p}$, que des $x_{i_1 i_2 \cdots i_p}$ où interviennent *tous* les indices $p+1, p+2, \cdots, n$, mais où n'intervient aucun des indices $1, 2, \cdots, p$. Cela n'est manifestement possible que si $n = 2p$.

Si donc $n \neq 2p$, le tenseur $\mathfrak{T}$ contient la composante $x_{12\cdots p}$; une permutation quelconque effectuée sur les coordonnées x_i, suivie au besoin du changement de signe d'une de ces coordonnées si la permutation est impaire, montre alors que le tenseur $\mathfrak{T}$ contient toutes les composantes du p-vecteur, qui est donc irréductible.

49. Les semi-ν-vecteurs de l'espace $E_{2\nu}$. — Supposons maintenant n pair, $n = 2\nu$ et $p = \nu$. Le raisonnement précédent montre que le tenseur $\mathfrak{T}$ contient au moins une composante de la forme

$$x_{12\cdots\nu} + \alpha x_{(\nu+1)(\nu+2)\cdots(2\nu)}.$$

Une permutation effectuée sur les indices permet d'en déduire l'existence de la composante

$$x_{k_1 k_2 \cdots k_\nu} \pm \alpha x_{k_{\nu+1} k_{\nu+2} \cdots k_{2\nu}},$$

où il faut prendre le signe + ou le signe — suivant que la permutation $(k_1\, k_2 \cdots k_n)$ est paire ou impaire. En particulier on aura la composante

$$x_{(\nu+1)(\nu+2)\cdots(2\nu)} + (-1)^\nu \alpha x_{12\cdots\nu}.$$

Si l'on veut que le tenseur $\mathfrak{T}$ ne se confonde pas avec le ν-vecteur, il est nécessaire que l'on ait $\alpha^2 = (-1)^\nu$, c'est-à-dire $\alpha = \pm i^\nu$.

Réciproquement prenons par exemple $\alpha = i^\nu$. Les quantités

$$x_{k_1 k_2 \cdots k_\nu} + i^\nu x_{k_{\nu+1} k_{\nu+2} \cdots k_{2\nu}},$$

où la permutation $(k_1 k_2 \cdots k_n)$ est paire, engendrent un tenseur. En

effet les composantes du ν-vecteur supplémentaire du ν-vecteur donné sont

$$y_{k_1 k_2 \cdots k_\nu} = x_{k_{\nu+1} k_{\nu+2} \cdots k_{2\nu}};$$

ce ν-vecteur supplémentaire constitue un tenseur équivalent à un ν-vecteur ; par suite les quantités $x_{k_1 k_2 \cdots k_\nu} + m y_{k_1 k_2 \cdots k_\nu}$ forment un tenseur : il suffit de donner à m la valeur i^ν pour retrouver les quantités considérées.

Le ν-vecteur se décompose donc en deux tenseurs irréductibles ; *ils ne sont pas équivalents*, sinon le ν-vecteur admettrait une infinité de tenseurs irréductibles de degré $\frac{1}{2} C_{2\nu}^\nu$ (nº **34**), alors qu'il n'en admet que deux.

En coordonnées cartésiennes quelconques les deux tenseurs dont nous venons de démontrer l'existence, et que nous appellerons les semi-ν-vecteurs de première et de seconde espèce, ont pour composantes

$$x_{k_1 k_2 \cdots k_\nu} + \varepsilon i^\nu \sqrt{g}\, x^{k_{\nu+1} k_{\nu+2} \cdots k_{2\nu}} \qquad (\varepsilon = \pm 1),$$

comme cela résulte de l'expression des composantes du ν-vecteur supplémentaire d'un ν-vecteur donné (nº **17**).

50. Remarques. — Les résultats précédents subsistent si l'on considère le groupe des rotations, ou même simplement le groupe des rotations propres, d'un espace pseudo-euclidien réel, bien que la démonstration donnée ait dans ce cas besoin d'être complétée. C'est une conséquence d'un théorème général qui sera indiqué plus loin (nº **75**).

On peut se demander si le p-vecteur et le q-vecteur ($p \neq q$) peuvent former des tenseurs équivalents. Ce ne peut être le cas que si $q = n - p$, seuls cas où les tenseurs envisagés sont du même degré.

Par rapport au groupe des rotations le p-vecteur et le (n-p)-vecteur sont effectivement équivalents, car les composantes correspondantes d'un p-vecteur et du ($n - p$)-vecteur supplémentaire se transforment évidemment de la même manière par une rotation. Nous avons déjà vu d'autre part que si $n = 2\nu$, le semi-ν-vecteur de première espèce et le semi-ν-vecteur de seconde espèce ne sont pas équivalents.

51. Les multivecteurs envisagés par rapport au groupe des rotations et des retournements. — Ici les semi-ν-vecteurs ne constituent plus des tenseurs , car une symétrie change un semi-ν-vecteur de première espèce en un semi-ν-vecteur de seconde espèce.

THÉORÈME. — *Les p-vecteurs ($p = 1, 2, \cdots, n$) constituent des tenseurs irréductibles ; ils sont non équivalents entre eux.*

La seconde partie du théorème est facile à démontrer : il suffit de prouver qu'un p-vecteur et un $(n - p)$-vecteur ($n \neq 2p$) ne sont pas équivalents entre eux. S'ils l'étaient on pourrait établir une correspondance entre les composantes de ces deux tenseurs de manière que par toute rotation et tout retournement celles du p-vecteur et celles du $(n - p)$-vecteur se transforment de la même manière. Nous savons que, en ce qui concerne le groupe des rotations, c'est possible et d'une seule manière (nº **32**) : la composante y_α du $(n - p)$-vecteur qui doit correspondre à une composante donnée $x_{k_1 k_2 \cdots k_p}$ du p-vecteur est, à un facteur constant près, la composante de même nom du p-vecteur supplémentaire du $(n - p)$-vecteur donné, à savoir $y^{k_{p+1} k_{p+2} \cdots k_n}$(la permutation $k_1 k_2 \cdots k_n$ étant paire) (nº **17**). Si nous nous supposons en coordonnées rectangulaires, nous voyons que la symétrie associée à un des vecteurs de base reproduit les deux composantes correspondantes, mais l'une sans changement de signe, l'autre avec changement de signe.

CHAPITRE III.

LES SPINEURS DE L'ESPACE A TROIS DIMENSIONS.

I. — LA NOTION DE SPINEUR.

52. Définition. — Considérons dans l'espace E_3 à trois dimensions rapporté à un système de coordonnées rectangulaires un vecteur isotrope ou de longueur nulle (x_1, x_2, x_3). On peut associer à ce vecteur dont les composantes satisfont à la relation

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0$$

deux nombres ξ_0, ξ_1, par les formules

$$\begin{aligned} x_1 &= \xi_0^2 - \xi_1^2, \\ x_2 &= i(\xi_0^2 + \xi_1^2), \\ x_3 &= -2\xi_0\xi_1. \end{aligned}$$

Le problème comporte deux solutions, fournies par exemple par les formules

$$\xi_0 = \pm\sqrt{\frac{x_1 - ix_2}{2}}, \qquad \xi_1 = \frac{x_1 + ix_2}{x_3}\,\xi_0.$$

Il n'est pas possible de trouver une loi cohérente permettant de faire un choix déterminé pour chaque vecteur isotrope, si toutefois l'on exige que la solution choisie varie d'une manière continue avec le vecteur. En effet supposons obtenue une telle loi ; partons d'un vecteur isotrope déterminé et faisons-le tourner autour de Ox_3 d'un angle α variant d'une manière continue : $x_1 - ix_2$ étant multiplié par $e^{-i\alpha}$, ξ_0 sera, par raison de continuité, multiplié par $e^{-i\frac{\alpha}{2}}$. Quand on aura effectué la rotation d'un angle 2π, ξ_0 se trouvera multiplié par $e^{-i\pi} = -1$; on retombera ainsi sur le vecteur isotrope initial, mais avec une détermination de ξ_0 distincte de la détermination initiale.

Le système des deux quantités ξ_0, ξ_1 est un *spineur*. Un spineur

est donc en quelque sorte un vecteur isotrope *orienté* ou *polarisé*: une rotation autour d'un axe d'un angle 2π change la polarisation de ce vecteur isotrope.

53. Le spineur est un tenseur euclidien. — Considérons une rotation (ou un retournement) définie par les équations

$$\begin{aligned} x'_1 &= \alpha x_1 + \beta x_2 + \gamma x_3, \\ x'_2 &= \alpha' x_1 + \beta' x_2 + \gamma' x_3, \\ x'_3 &= \alpha'' x_1 + \beta'' x_2 + \gamma'' x_3, \end{aligned}$$

où α,β,γ, α',β',γ', $\alpha'',\beta'',\gamma''$ sont les neuf cosinus directeurs de trois directions rectangulaires. Si l'on considère le spineur (ξ_0, ξ_1) associé à un vecteur isotrope (x_1, x_2, x_3) et l'un des spineurs (ξ'_0, ξ'_1) associés au vecteur transformé, on a

$$\begin{aligned} \xi'^2_0 &= \frac{1}{2}[(\alpha - i\alpha')x_1 + (\beta - i\beta')x_2 + (\gamma - i\gamma')x_3] \\ &= \frac{1}{2}(\alpha - i\alpha' + i\beta + \beta')\xi_0^2 - (\gamma - i\gamma')\xi_0\xi_1 + \frac{1}{2}(-\alpha + i\alpha' + i\beta + \beta')\xi_1^2. \end{aligned}$$

Le second membre est un carré parfait, le discriminant du trinome étant

$$\begin{aligned} (\gamma - i\gamma')^2 - (\alpha - i\alpha' + i\beta + \beta')(-\alpha + i\alpha' + i\beta + \beta') \\ = (\alpha - i\alpha')^2 + (\beta - i\beta')^2 + (\gamma - i\gamma')^2 = 0. \end{aligned}$$

La quantité ξ'_0 est ainsi linéaire en ξ_0, ξ_1 et il en est de même évidemment de ξ'_1. Quand on choisit celle des deux valeurs que comporte ξ'_0, la quantité ξ'_1 est déterminée par la relation

$$\xi'_0\xi'_1 = -\frac{1}{2}(\alpha'' + i\beta'')\xi_0^2 + \gamma''\xi_0\xi_1 + \frac{1}{2}(\alpha'' - i\beta'')\xi^2_1.$$

Nour verrons plus loin la formation des substitutions linéaires que les rotations et les retournements font subir aux spineurs.

54. Interprétation géométrique du rapport $\frac{\xi_0}{\xi_1}$. — Si nous portons notre attention sur le rapport $\frac{\xi_0}{\xi_1}$, ce rapport subit une transformation homographique par toute rotation ou tout retournement. Cela est bien connu, car $\frac{\xi_0}{\xi_1}$ peut être considéré comme le paramètre d'une génératrice du cône isotrope et toute rotation ou tout retournement conserve le rapport anharmonique de quatre génératrices de ce cône. Du reste cette transformation homogra-

phique étant connue, la rotation est déterminée, car si M est un point quelconque de l'espace, les deux droites isotropes perpendiculaires à OM sont transformées en deux droites isotropes connues auxquelles est perpendiculaire la droite OM′ ; cette droite est donc déterminée et par suite aussi le point M′. Ces considérations sont à la base de la théorie des paramètres d'Euler-Olinde-Rodrigues, que nous verrons un peu plus loin.

II. — LES MATRICES ASSOCIÉES AUX VECTEURS.

55. Matrice associée à un vecteur. — Revenons aux spineurs. Les équations de la droite isotrope qui porte le vecteur isotrope associé à un spineur ξ peuvent s'écrire

$$(1) \qquad \begin{cases} \xi_0 x_3 + \xi_1(x_1 - ix_2) = 0, \\ \xi_0(x_1 + ix_2) - \xi_1 x_3 = 0. \end{cases}$$

Cela posé considérons la matrice

$$X = \begin{pmatrix} x_3 & x_1 - ix_2 \\ x_1 + ix_2 & -x_3 \end{pmatrix}$$

formée par les coefficients de ξ_0 et de ξ_1 dans les premiers membres des équations. Si nous regardons x_1, x_2, x_3 comme les composantes d'un vecteur $\vec{x}$, nous dirons que la matrice X est associée à ce vecteur et nous dirons souvent « le vecteur X » au lieu de « le vecteur auquel est associée la matrice X ».

Les matrices X jouissent de propriétés remarquables.

THÉORÈME I. — *Le déterminant de la matrice associée à un vecteur est égal au carré scalaire changé de signe de ce vecteur.*

THÉORÈME II. — *Le carré de la matrice X associée à un vecteur est égal à la matrice unité multipliée par le carré scalaire du vecteur.*

En effet on a

$$XX = \begin{pmatrix} x_3^2 + (x_1 - ix_2)(x_1 + ix_2) & x_3(x_1 - ix_2) - (x_1 - ix_2)x_3 \\ (x_1 + ix_2)x_3 - x_3(x_1 + ix_2) & (x_1 + ix_2)(x_1 - ix_2) + x_3^2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 & 0 \\ 0 & x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \end{pmatrix} = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2.$$

THÉORÈME III. — *Le produit scalaire de deux vecteurs $\vec{x}.\vec{y}$ est la demi-somme des produits XY et YX des matrices associées.*

En effet λ et μ désignant deux paramètres on a

$$(\lambda X + \mu Y)^2 = \lambda^2 X^2 + \mu^2 Y^2 + \lambda\mu(XY + YX),$$
$$(\lambda \vec{x} + \mu \vec{y})^2 = \lambda^2 \vec{x}^2 + \mu^2 \vec{y}^2 + 2\lambda\mu \vec{x} \cdot \vec{y},$$

d'où le théorème se déduit immédiatement

En particulier si l'on considère les matrices associées aux vecteurs de base

$$H_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad H_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \qquad H_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

les carrés de ces matrices sont égaux à 1 et le produit de deux quelconques d'entre elles change de signe avec l'ordre des facteurs :

$$H_1^2 = H_2^2 = H_3^2 = 1\,; \quad H_2H_3 = -H_3H_2, \quad H_3H_1 = -H_1H_3, \quad H_1H_2 = -H_2H_1.$$

56. Matrice associée à un bivecteur, à un trivecteur. — Considérons le bivecteur déterminé par les deux vecteurs $\vec{x}$, $\vec{y}$ et représenté analytiquement par les composantes

$$x_2y_3 - x_3y_2, \quad x_3y_1 - x_1y_3, \quad x_1y_2 - x_2y_1.$$

On peut lui associer la matrice

$$\frac{1}{2}(XY - YX) = \begin{pmatrix} i(x_1y_2 - x_2y_1) & i(x_2y_3 - x_3y_2) + x_3y_1 - x_1y_3 \\ i(x_2y_3 - x_3y_2) - (x_3y_1 - x_1y_3) & -i(x_1y_2 - x_2y_1) \end{pmatrix}.$$

On remarque que *cette matrice est le produit par i de la matrice associée au produit vectoriel des deux vecteurs donnés.*

Si les deux vecteurs sont rectangulaires, la matrice associée au bivecteur est

$$XY = -YX.$$

On peut de même associer à un *trivecteur* défini par trois vecteurs $\vec{x}$, $\vec{y}$, $\vec{z}$ la matrice

$$\frac{1}{6}(XYZ + YZX + ZXY - YXZ - ZYX - XZY).$$

Si les trois vecteurs sont rectangulaires, cette matrice est égale à XYZ. En désignant par $\vec{u}$ le produit vectoriel $\vec{x} \wedge \vec{y}$, on a

$$XYZ = iUZ.$$

Or le produit UZ des matrices associées à deux vecteurs portés sur la même droite est égal au produit scalaire de ces vecteurs, lequel est ici égal au volume v du trivecteur. *La matrice associée*

à un trivecteur de volume algébrique v est donc iv. En particulier on a

$$H_1H_2H_3 = i,$$

comme le montre un calcul facile.

57. Relation avec la théorie des quaternions. — Il n'existe aucune relation linéaire à coefficients complexes non tous nuls de la forme

$$a_0 + a_1H_1 + a_2H_2 + a_3H_3 = 0.$$

On peut le vérifier directement, le premier membre étant la matrice

$$\begin{pmatrix} a_0 + a_3 & a_1 - ia_2 \\ a_1 + ia_2 & a_0 - a_3 \end{pmatrix}.$$

Il en résulte que toute matrice d'ordre 2 à éléments complexes est, d'une manière et d'une seule, la somme d'un scalaire et d'un vecteur. Nous avons là un système de nombres hypercomplexes qui ne diffère pas du système des quaternions ; il suffit de poser

$$I_1 = -iH_1, \qquad I_2 = -iH_2, \qquad I_3 = -iH_3$$

et l'on a la loi de composition

$$I_1^2 = I_2^2 = I_3^2 = -1\,; \; I_2I_3 = -I_3I_2 = I_1,\; I_3I_1 = -I_1I_3 = I_2,\; I_1I_2 = -I_2I_1 = I_3.$$

Dans le domaine réel, les matrices 1, H_1, H_2, H_3, iH_1, iH_2, iH_3, i, entre lesquelles n'existe aucune combinaison linéaire à coefficients réels non tous nuls, forment un système de nombres hypercomplexes à 8 unités construit sur le corps des nombres réels. Tout nombre du système est, d'une manière et d'une seule, la somme d'un scalaire réel, d'un vecteur réel, d'un bivecteur réel et d'un trivecteur réel.

III. — LES REPRÉSENTATIONS DES SYMÉTRIES ET DES ROTATIONS.

58. Représentation d'une symétrie. — Soit $\vec{a}$ un vecteur unitaire donné ; le vecteur $\vec{x'}$ symétrique d'un vecteur $\vec{x}$ par rapport au plan Π perpendiculaire à $\vec{a}$ mené par l'origine est donné (nº **9**) par

$$\vec{x'} = \vec{x} - 2\vec{a}\,(\vec{x} \cdot \vec{a}),$$

ou, en passant aux matrices associées et remarquant que $A^2 = 1$,

$$X' = X - A(XA + AX) = -AXA. \tag{2}$$

Le symétrique d'un bivecteur défini par deux vecteurs rectangulaires X, Y, est donné d'après cela par

$$X'Y' = AXYA,$$

d'où, pour les matrices U associées à des bivecteurs,

$$U' = AUA. \tag{3}$$

Enfin par la symétrie considérée la matrice associée d'un trivecteur se reproduit changée de signe.

59. Représentation d'une rotation. — Toute rotation résultant de deux symétries A, B (nº **10**), on aura, en ce qui concerne l'effet produit sur un vecteur X et sur un bivecteur U,

$$X' = BAXAB, \qquad U' = BAUAB,$$

ou encore

$$X' = SXS^{-1}, \qquad U' = SUS^{-1}, \tag{4}$$

en posant $S = BA$.

La formule (3) permet de retrouver les formules d'Euler-Olinde-Rodrigues. Soit L le vecteur unitaire porté sur l'axe de rotation et θ l'angle de rotation ; les deux vecteurs unitaires A, B ont pour produit scalaire $\cos\frac{\theta}{2}$ et leur produit vectoriel $\frac{1}{2}(AB - BA)$ est égal à $i\mathrm{L}\sin\frac{\theta}{2}$. On en déduit

$$BA = \cos\frac{\theta}{2} - i\mathrm{L}\sin\frac{\theta}{2}, \qquad AB = \cos\frac{\theta}{2} + i\mathrm{L}\sin\frac{\theta}{2},$$

d'où

$$X' = \left(\cos\frac{\theta}{2} - i\mathrm{L}\sin\frac{\theta}{2}\right)X\left(\cos\frac{\theta}{2} + i\mathrm{L}\sin\frac{\theta}{2}\right). \tag{5}$$

Si l'on désigne par l_1, l_2, l_3 les cosinus directeurs de L, les paramètres d'Euler-Olinde-Rodrigues sont les quatre quantités

$$\rho = \cos\frac{\theta}{2}, \qquad \lambda = l_1\sin\frac{\theta}{2}, \qquad \mu = l_2\sin\frac{\theta}{2}, \qquad \nu = l_3\sin\frac{\theta}{2},$$

dont la somme des carrés est égale à 1.

60. Opérations sur les spineurs. — Revenons aux spineurs. Désignons par ξ la matrice à deux lignes et une colonne dont les éléments sont ξ_0, ξ_1, et attachons *par convention* à la symétrie par

rapport au plan Π perpendiculaire au vecteur unitaire $\vec{a}$ l'opération

$$\xi' = A\xi. \tag{6}$$

Il est facile de voir que si $\vec{x}$ est le vecteur isotrope auquel est associé le spineur $\vec{\xi}$, le spineur associé au vecteur isotrope $\vec{x'}$ symétrique de $\vec{x}$ par rapport à Π est $\vec{\xi'}$ ou un multiple scalaire de $\vec{\xi'}$. En effet d'après les équations (1) qui lient les composantes de $\vec{x}$ à celles de $\vec{\xi}$, on a $X\xi = 0$; d'autre part on tire de (2) et de (6)

$$X'\xi' = -(AXA)(A\xi) = -AX\xi = 0\,;$$

donc le spineur associé au vecteur X′ est de la forme $m\vec{\xi'}$.

Dans le cas particulier où le vecteur $\vec{a}$ est le vecteur de base $\vec{e_3}$:

$$A = H_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

la formule (6) donne

$$\xi'_0 = \xi_0, \qquad \xi'_1 = -\xi_1\,;$$

le spineur $\vec{\xi'}$ est effectivement l'un des spineurs associés au symétrique X′ de X. Pour voir qu'il en est ainsi dans le cas général, remarquons que l'opération $\xi \to mA\xi$ répétée deux fois doit redonner un spineur associé au vecteur isotrope initial, donc ξ ou $-\xi$; on a par suite $m^2 = \pm 1$; mais m variant par continuité avec A est fixe. La convention faite est donc légitime.

Nous remarquons que, appliquée aux spineurs, toute symétrie se dédouble en deux autres à savoir

$$\xi' = A\xi \qquad \text{et} \qquad \xi' = -A\xi\,:$$

chacune d'elles est caractérisée par le choix du vecteur unitaire perpendiculaire au plan de symétrie.

Toute rotation étant un produit de deux symétries se dédouble également. L'effet de la rotation résultant de la symétrie A et de la symétrie B est donné par

$$\xi' = BA\xi\,; \tag{7}$$

la rotation géométriquement égale — BA donnerait l'opération

$$\xi' = -BA\xi.$$

IV. — LE PRODUIT DE DEUX SPINEURS ET SA DÉCOMPOSITION EN PARTIES IRRÉDUCTIBLES

Les trois monomes ξ_0^2, $\xi_0\xi_1$, ξ_1^2 forment *a priori* un tenseur, qui est équivalent au vecteur : ce sont en effet des combinaisons linéaires indépendantes des composantes d'un vecteur isotrope, mais le vecteur isotrope, en tant que tenseur, est équivalent au vecteur général.

61. La matrice C. — Nous allons maintenant considérer le tenseur $\xi_\alpha \xi'_\beta$ de degré 4 produit de deux spineurs $\vec{\xi}$, $\vec{\xi'}$. Pour l'étudier nous allons introduire la matrice

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \tag{8}$$

qui jouit de la propriété remarquable que X étant un vecteur quelconque, on a

$$CX = -X^*C\,; \tag{9}$$

on a du reste

$$C^* = -C, \qquad CC^* = 1, \qquad C^2 = -1. \tag{10}$$

La vérification est immédiate d'après l'expression générale de X (n° **55**) : on a

$$CX = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_3 & x_1 - ix_2 \\ x_1 + ix_2 & -x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + ix_2 & -x_3 \\ -x_3 & -x_1 + ix_2 \end{pmatrix},$$
$$X^*C = \begin{pmatrix} x_3 & x_1 + ix_2 \\ x_1 - ix_2 & -x_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_1 - ix_2 & x_3 \\ x_3 & x_1 - ix_2 \end{pmatrix}.$$

62. Le trivecteur et le vecteur associés à deux spineurs. — Considérons deux spineurs $\vec{\xi}$ et $\vec{\xi'}$, et la quantité

$$\xi'^*C\xi\,;$$

par la symétrie A, cette quantité devient d'après (6) et (9)

$$\xi'^*A^*CA\xi = -\xi'^*CA^2\xi = -\xi'^*C\xi\,;$$

elle se reproduit donc changée de signe. Elle constitue donc un tenseur équivalent au trivecteur, invariant par une rotation, changé de signe par un retournement. Sa valeur explicite est du reste

$$\xi'_0\xi_1 - \xi'_1\xi_0.$$

Il est clair *a priori* qu'une telle quantité par une substitution

linéaire effectuée sur les deux spineurs, se reproduit multipliée par le déterminant de la substitution ; or le déterminant de A est effectivement égal à -1.

Considérons maintenant, en même temps que les deux spineurs, un vecteur arbitraire X et envisageons la quantité

$$\xi'^* \mathrm{C} \mathrm{X} \xi\ ;$$

par la symétrie A, elle devient, en tenant compte de (2), (6) et (9),

$$-(\xi'^* \mathrm{A}^*)\mathrm{C}(\mathrm{AXA})(\mathrm{A}\xi) = \xi'^* \mathrm{CX}\xi\ ;$$

elle est donc invariante par toute rotation et tout retournement. Or c'est une forme bilinéaire des composantes x_1, x_2, x_3 du vecteur X et des produits $\xi_\alpha \xi'_\beta$. Il en résulte (nº **27**) que les coefficients de x_1, x_2, x_3 constituent un tenseur ; ce tenseur est équivalent à un vecteur, car la somme $x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3$, où les y_i sont les composantes d'un vecteur, étant également invariante par toute rotation et tout retournement, le tenseur considéré est équivalent au tenseur y_α. Le vecteur ainsi défini a ses composantes symétriques par rapport aux composantes de ξ et de ξ', car l'on a

$$\xi^* \mathrm{CX}\xi' = \xi'^* \mathrm{X}^* \mathrm{C}^* \xi = -\xi'^* \mathrm{X}^* \mathrm{C}\xi = \xi'^* \mathrm{CX}\xi\ :$$

l'égalité des deux premiers membres résulte de ce qu'un scalaire est égal à son transposé. On a du reste pour les composantes du vecteur considéré

$$\begin{aligned} y_1 &= \xi'^* \mathrm{CH}_1 \xi = \xi'_0 \xi_0 - \xi'_1 \xi_1, \\ y_2 &= \xi'^* \mathrm{CH}_2 \xi = i\xi'_0 \xi_0 + i\xi'_1 \xi_1, \\ y_3 &= \xi'^* \mathrm{CH}_3 \xi = -\xi'_0 \xi_1 - \xi'_1 \xi_0\ ; \end{aligned}$$

pour $\xi' = \xi$, on retrouve le vecteur isotrope qui fournit le spineur ξ; pour $\xi' \neq \xi$, on remarque que le carré scalaire du vecteur est égal à $(\xi'_0 \xi_1 - \xi_1' \xi_0)^2$.

Nous avons ainsi obtenu la décomposition du tenseur $\xi_\alpha \xi'_\beta$ $(\alpha, \beta = 0, 1)$ *de degré 4 en un vecteur et un trivecteur, le volume du trivecteur étant égal à la longueur du vecteur.*

V. — CAS DE L'ESPACE EUCLIDIEN RÉEL.

Tout ce qui précède s'applique au domaine des rotations et des retournements complexes. Plaçons-nous maintenant dans l'espace euclidien réel en ne considérant que les rotations et les retournements réels.

63. Vecteurs complexes conjugués. — Les matrices X et Y associées à deux vecteurs complexes conjugués

$$X = \begin{pmatrix} x_3 & x_1 - ix_2 \\ x_1 + ix_2 & -x_3 \end{pmatrix}, \qquad Y = \begin{pmatrix} \bar{x}_3 & \bar{x}_1 - i\bar{x}_2 \\ \bar{x}_1 + i\bar{x}_2 & -\bar{x}_3 \end{pmatrix}$$

satisfont manifestement à

$$(11) \qquad Y = \bar{X}^* \quad \text{ou} \quad \bar{Y} = X^* ;$$

en particulier si le vecteur est réel, on a $\bar{X} = X^*$ d'où le théorème

Théorème. — *La matrice associée à un vecteur réel est hermitienne.*

La matrice U associée à un bivecteur réel étant le produit par i de la matrice associée à un vecteur réel n'est pas hermitienne ; on a

$$\bar{U} = -U^*.$$

Toute rotation est représentée par une matrice $S = BA$, produit des matrices associées à deux vecteurs unitaires réels ; on a par suite

$$\bar{S}^* = \bar{A}^*\bar{B}^* = AB = (BA)^{-1} = S^{-1}.$$

d'où le

Théorème. — *Toute rotation est représentée par une matrice unitaire unimodulaire et tout retournement par une matrice unitaire de déterminant* — 1.

64. Spineurs conjugués. — Soit X un vecteur isotrope, ξ un des spineurs associés ; on a $X\xi = 0$. On déduit de là

$$C\bar{X}\bar{\xi} = 0 ;$$

or, d'après (9) et (11), on a

$$0 = C\bar{X}\bar{\xi} = -\bar{X}^*C\bar{\xi} = -YC\bar{\xi},$$

Y étant le vecteur imaginaire conjugué de X. Par suite chacun des spineurs associés à Y est de la forme $mC\bar{\xi}$; on vérifie facilement que le coefficient m est égal à $\pm i$.

Nous conviendrons de dire que le spineur conjugué de ξ est $iC\bar{\xi}$. L'opération de conjugaison ainsi définie n'est pas involutive, car, effectuée deux fois de suite, elle fait passer de ξ à $-\xi$.

Il importe de remarquer que le spineur $iC\bar{\xi}$ est en réalité d'une

nature différente de ξ, car, par la symétrie A, la matrice $iC\bar{\xi}$ devient

$$iC\bar{A}\bar{\xi} = iCA^*\bar{\xi} = -iA(C\bar{\xi}) :$$

elle est donc multipliée à gauche par — A et non par A. Nous dirons que le conjugué d'un spineur est un spineur de seconde espèce.

65. Le scalaire et le bivecteur associés à deux spineurs conjugués. — Si dans le produit de deux spineurs ξ, ξ' on remplace ξ' par le conjugué de ξ, ou encore par $C\bar{\xi}$, on obtient un tenseur qui se décompose en deux parties irréductibles. L'une est fournie par la quantité

$$(\bar{\xi}^*C^*)C\xi = \bar{\xi}^*\xi = \xi_0\bar{\xi}_0 + \xi_1\bar{\xi}_1 ;$$

c'est un *scalaire* invariant par toute rotation et tout retournement ; nous avons du reste vu déjà (nº **63**) que toute rotation et tout retournement sont représentés par des matrices unitaires. L'autre partie irréductible est fournie par la quantité

$$(\bar{\xi}^*C^*)CX\xi = \bar{\xi}^*X\xi = (x_1 + ix_2)\xi_0\bar{\xi}_1 + (x_1 - ix_2)\xi_1\bar{\xi}_0 + x_3(\xi_0\bar{\xi}_0 - \xi_1\bar{\xi}_1) ;$$

les coefficients de x_1, x_2, x_3 forment un *bivecteur*. En effet par une symétrie réelle A, la quantité $\bar{\xi}^*X\xi$ devient

$$-(\bar{\xi}^*\bar{A}^*)(AXA)(A\xi) = -\bar{\xi}^*X\xi :$$

elle se reproduit par une rotation, mais change de signe par un retournement ; elle est donc équivalente à un trivecteur ; or la quantité

$$x_1y_{12} + x_2y_{31} + x_1y_{12},$$

où y_{23}, y_{31}, y_{12} sont les composantes d'un *bivecteur*, est précisément un trivecteur. Par suite (nº **27**, théorème II), *les trois quantités*

$$\xi_0\bar{\xi}_1 + \xi_1\bar{\xi}_0, \quad i(\xi_0\bar{\xi}_1 - \xi_1\bar{\xi}_0), \quad \xi_0\bar{\xi}_0 - \xi_1\bar{\xi}_1$$

sont les composantes d'un bivecteur. Qu'elles ne soient pas les composantes d'un vecteur cela résulte du reste immédiatement de la remarque que, par symétrie par rapport à l'origine, elles restent invariables, ξ_0 et ξ_1 se reproduisant multipliées par i.

VI. — CAS DE L'ESPACE PSEUDO-EUCLIDIEN.

66. Rotations réelles. — On aura un espace pseudo-euclidien réel en remplaçant partout x_2 par ix_2 et regardant les nouvelles

coordonnées x_1, x_2, x_3 comme réelles. La matrice associée à un vecteur réel devient maintenant réelle :

$$X = \begin{pmatrix} x_3 & x_1 - x_2 \\ x_1 + x_2 & -x_3 \end{pmatrix}.$$

A un vecteur isotrope (vecteur de lumière) de composante de temps positive ($x_2 > 0$) sont associés deux spineurs à composantes réelles :

$$x_1 = \xi_0^2 - \xi_1^2, \quad x_2 = \xi_0^2 + \xi_1^2, \quad x_3 = -2\xi_0\xi_1.$$

Le spineur conjugué d'un spineur ξ est $\bar{\xi}$; il est de même espèce que ξ.

La quantité $\bar{\xi}^*C\xi$ définit un trivecteur $\bar{\xi}_0\xi_1 - \bar{\xi}_1\xi_0$. La quantité $\bar{\xi}^*CX\xi$ définit un vecteur réel

$$y_1 = \xi_0\bar{\xi}_0 - \xi_1\bar{\xi}_1, \quad y_2 = \xi_0\bar{\xi}_0 + \xi_1\bar{\xi}_1, \quad y_3 = -(\xi_0\bar{\xi}_1 + \xi_1\bar{\xi}_0) ;$$

c'est un *vecteur de temps* dont la longueur est $i(\xi_0\bar{\xi}_1 - \xi_1\bar{\xi}_0)$; il est isotrope si le spineur ξ est réel.

Enfin les rotations *propres* sont représentées par des matrices réelles unimodulaires et les retournements *propres* par des matrices réelles de déterminant -1.

CHAPITRE IV.

LES REPRÉSENTATIONS LINÉAIRES DU GROUPE DES ROTATIONS DE E_3.

I. — LES REPRÉSENTATIONS LINÉAIRES QU'ON PEUT ENGENDRER AU MOYEN DES SPINEURS.

Nous allons indiquer une méthode simple pour construire dans l'espace euclidien complexe ou réel à trois dimensions une suite illimitée de représentations linéaires irréductibles soit du groupe des rotations, soit du groupe des rotations et des retournements. Nous verrons plus loin qu'il n'y en a pas d'autres, au moins dans l'espace réel, et que de plus toute représentation linéaire de l'un de ces groupes est complétement réductible. D'après un théorème qui sera énoncé plus loin, toute représentation linéaire de l'un quelconque des groupes réels considérés fournit une représentation linéaire du groupe complexe correspondant, et ces deux représentations sont en même temps irréductibles ou réductibles.

67. La représentation $\mathfrak{D}_{\frac{p}{2}}$ et son polynome générateur. — Partons du spineur (ξ_0, ξ_1). L'ensemble des polynomes entiers homogènes de degré p en ξ_0 et ξ_1 constituent un tenseur et fournissent une représentation linéaire du groupe des rotations. On peut représenter symboliquement ce tenseur par le *polynome générateur* $(a\xi_0 + b\xi_1)^p$, où a et b désignent deux paramètres arbitraires : cela veut dire que les coefficients des différents monomes en a et b de ce polynome développé constituent les composantes du tenseur. Nous appellerons $\mathfrak{D}_{\frac{p}{2}}$ le tenseur ou la représentation linéaire correspondante.

THÉORÈME. — *La représentation $\mathfrak{D}_{\frac{p}{2}}$ est irréductible.*

Il suffit de démontrer ce théorème pour le groupe des rotations complexes. Considérons l'opération

$$\xi_0' = \xi_0 e^{i\frac{\theta}{2}}, \qquad \xi_1' = \xi_1 e^{-i\frac{\theta}{2}}$$

résultant d'une rotation de l'angle réel θ autour de l'axe des x_3. Par cette opération $\xi_0^\alpha \xi_1^\beta$ se reproduit multiplié par $e^{i(\alpha-\beta)\frac{\theta}{2}}$. Si θ n'est pas pris d'une manière particulière, les multiplicateurs correspondant aux différentes composantes $\xi_0^\alpha \xi_1^\beta$ du tenseur sont tous distincts. Supposons alors que la représentation $\mathfrak{D}_{\frac{p}{2}}$ ne soit pas irréductible. Il existerait un tenseur $\mathcal{T}$ formé par $q < p+1$ polynomes entiers de degré p en ξ_0, ξ_1 ; soit

$$A_0 \xi_0^p + A_1 \xi_0^p \xi_1 + \cdots + A_p \xi_1^p$$

l'un de ces polynomes ; la rotation envisagée plus haut le transforme en

$$A_0 e^{i\frac{p}{2}\theta} \xi_0^p + A_1 e^{i\left(\frac{p}{2}-1\right)\theta} \xi_0^{p-1}\xi_1 + \cdots + A_p e^{-i\frac{p}{2}\theta} \xi_1^p ;$$

en répétant p fois cette opération, on obtient $p+1$ combinaisons linéairement indépendantes de

$$A_0 \xi_0^p, \qquad A_1 \xi_0^{p-1}\xi_1, \qquad A_2 \xi_0^{p-2}\xi_1^2, \cdots, A_p \xi_1^p.$$

Il résulte de là qu'il existe au moins un monome $\xi_0^h \xi_1^k$ $(h+k=p)$ faisant partie du tenseur $\mathcal{T}$, et que par suite tous les polynomes $(\alpha\xi_0 + \beta\xi_1)^h (\gamma\xi_0 + \delta\xi_1)^k$ où $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$ font également partie de $\mathcal{T}$. Si l'on suppose les quatre constantes $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ différentes de zéro, on voit que le coefficient de ξ_0^p dans le polynome correspondant n'est pas nul. Donc le tenseur $\mathcal{T}$ contient ξ_0^p, par suite $(\alpha\xi_0 + \beta\xi_1)^p$, d'où enfin tous les monomes $\xi_0^h \xi_1^k$. C.Q.F.D.

Pour $p = 0$, le tenseur obtenu, de degré 1, est scalaire ; pour $p = 1$ on a le *spineur* et pour $p = 2$ *le vecteur* : les quantités ξ_0^2, $\xi_0\xi_1$, ξ_1^2 se transforment, en effet, quand on fait sur elles une substitution linéaire fixe convenable, comme les composantes d'un vecteur.

Il existe une autre représentation de degré $p+1$ du groupe des rotations *et des retournements* : c'est celle qui est formée en partant des mêmes composantes, mais en supposant que par un retournement elles subissent la substitution précédemment considérée suivie d'un changement de signe de toutes les composantes. Nous

désignerons cette nouvelle représentation par le symbole $\mathfrak{D}^{-}_{\frac{p}{2}}$, la première étant désignée par $\mathfrak{D}^{+}_{\frac{p}{2}}$; un raisonnement déjà fait montre qu'elle n'est pas équivalente à la première. C'est ainsi que $\mathfrak{D}^{-}_{\frac{1}{2}}$ se rapporte au spineur de seconde espèce, $\mathfrak{D}_1^-$ au bivecteur et $\mathfrak{D}_0^-$ au trivecteur (ou $\xi_0\xi'_1 - \xi_1\xi'_0$). On peut prendre pour polynome générateur de $\mathfrak{D}^{-}_{\frac{p}{2}}$ l'expression

$$(\xi_0\xi'_1 - \xi_1\xi'_0)(a\xi_0 + b\xi_1)^p.$$

68. Décomposition de $\mathfrak{D}_i \times \mathfrak{D}_j$. — Soient $u_1, u_2, \cdots, u_{2i+1}$, d'une part ; $v_1, v_2, \cdots, v_{2j+1}$, d'autre part, les variables de deux représentations linéaires $\mathfrak{D}_i$ et $\mathfrak{D}_j$. Les produits $u_\alpha v_\beta$ conduisent à une nouvelle représentation linéaire de degré $(2i+1)(2j+1)$ qu'on désigne par $\mathfrak{D}_i \times \mathfrak{D}_j$. En général cette représentation n'est pas irréductible : nous allons la décomposer en représentations irréductibles.

Partons d'abord de la remarque que ξ et ξ' désignant deux spineurs arbitraires, les deux polynomes générateurs

$$\begin{aligned} P &= (a\xi_0 + b\xi_1)^p(a\xi'_0 + b\xi'_1)^q, \\ Q &= (a\xi_0 + b\xi_1)^p(a\xi_0 + b\xi_1)^q = (a\xi_0 + b\xi_1)^{p+q} \end{aligned}$$

définissent deux représentations équivalentes : cela tient à ce que les coefficients des différents monomes $a^\alpha b^\beta$ dans les deux polynomes se transforment entre eux de la même manière par toute rotation ou tout retournement, puisque ξ'_0 et ξ'_1 se transforment de la même maniére que ξ_0 et ξ_1.

Cela posé on peut prendre pour composantes de $\mathfrak{D}_{\frac{p}{2}} \times \mathfrak{D}_{\frac{q}{2}}$ les polynomes en $\xi_0, \xi_1, \xi'_0, \xi'_1$, qui sont du degré p en ξ_0, ξ_1, et q en ξ'_0, ξ'_1. Considérons alors les polynomes

$$\begin{aligned} \Phi_0 &\equiv (a\xi_0 + b\xi_1)^p(a\xi'_0 + b\xi'_1)^q, \\ \Phi_1 &\equiv (\xi_0\xi'_1 - \xi_1\xi'_0)(a\xi_0 + b\xi_1)^{p-1}(a\xi'_0 + b\xi'_1)^{q-1}, \\ \Phi_2 &\equiv (\xi_0\xi'_1 - \xi_1\xi'_0)^2(a\xi_0 + b\xi_1)^{p-2}(a\xi'_0 + b\xi'^1)^{q-2}, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \Phi_q &\equiv (\xi_0\xi'_1 - \xi_1\xi'_0)^q(a\xi_0 + b\xi_1)^{p-q}, \end{aligned}$$

où nous supposons $p \geqslant q$. Chacun d'eux définit une représentation linéaire irréductible, à savoir

$$\overset{+}{\mathfrak{D}}_{\frac{p+q}{2}}, \quad \overset{-}{\mathfrak{D}}_{\frac{p+q}{2}-1}, \quad \overset{+}{\mathfrak{D}}_{\frac{p+q}{2}-2}, \ldots, \overset{\pm}{\mathfrak{D}}_{\frac{p-q}{2}},$$

la dernière ayant l'indice + ou l'indice — suivant que q est pair ou impair.

Les composantes de chacune de ces représentations sont des composantes de la représentation donnée ; le nombre de ces composantes est

$$(p + q + 1) + (p + q - 1) + (p + q - 3) + \cdots + (p - q + 1)$$
$$= (q + 1)(p + q + 1) - q(q + 1) = (q + 1)(p + 1) ;$$

c'est précisément le degré de la ıeprésentation donnée. Ces composantes sont linéairement indépendantes, sinon, dans le tenseur réductible formé par les q tenseurs irréductibles trouvés, l'un au moins de ces tenseurs aurait toutes ses composantes nulles (nº **34**), ce qui n'est pas. Par suite nous avons le théorème suivant :

Théorème. — *Le produit des deux représentations linéaires irréductibles* $\overset{+}{\mathfrak{D}}_{\frac{p}{2}}$, $\overset{+}{\mathfrak{D}}_{\frac{q}{2}}$ *est complètement réductible et se décompose dans les représentations irréductibles*

$$\overset{+}{\mathfrak{D}}_{\frac{p+q}{2}}, \quad \overset{-}{\mathfrak{D}}_{\frac{p+q}{2}-1}, \quad \overset{+}{\mathfrak{D}}_{\frac{p+q}{2}-2}, \ldots, \overset{\pm}{\mathfrak{D}}_{\frac{p-q}{2}}.$$

69. Cas particuliers. Polynomes harmoniques. — Le cas des représentations $\mathfrak{D}_i$ pour lesquelles l'indice i est entier ($p = 2i$) peut être examiné à part. Pour $i = 1$ le polynome générateur

$$(a\xi_0 + b\xi_1)^2 = a^2\xi_0^2 + 2ab\xi_0\xi_1 + b^2\xi_1^2$$

peut être remplacé par un autre linéaire par rapport aux composantes x_1, x_2, x_3 d'un vecteur. On a en effet

$$\xi_0^2 \backsim -x_1 + ix_2, \qquad \xi_0\xi_1 \backsim x_3, \qquad \xi_1^2 \backsim x_1 + ix_2,$$

le signe $\backsim$ signifiant que les trois premiers membres se transforment linéairement comme les trois seconds membres ; par suite on peut prendre comme polynome générateur de $\mathfrak{D}_1$

$$(b^2 - a^2)x_1 + i(b^2 + a^2)x_2 + 2abx_3.$$

On pourra donc prendre comme polynome générateur de $\mathfrak{D}_p$

$$F_p \equiv [(b^2 - a^2)x_1 + i(b^2 + a^2)x_2 + 2abx_3]^p.$$

Le tenseur correspondant aura pour composantes $2p + 1$ polynomes homogènes entiers de degré p en x_1, x_2, x_3 : ce sont les *polynomes harmoniques*. En effet un calcul immédiat montre que

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial x_3^2} = 0.$$

Le produit $\mathfrak{D}_1^+ \times \mathfrak{D}_1^+$, c'est-à-dire le produit de deux vecteurs, se décompose dans les trois représentations irréductibles $\mathfrak{D}_2^+$, $\mathfrak{D}_1^-$ et $\mathfrak{D}_0^+$. La première fournit le tenseur

$$x_1x_1' - x_3x_3', \qquad x_2x_2' - x_3x_3', \qquad x_2x_3' + x_3x_2', \qquad x_3x_1' + x_1x_3',$$
$$x_1x_2' + x_2x_1',$$

équivalent au tenseur

$$x_1^2 - x_3^2, \qquad x_2^2 - x_3^2, \qquad 2x_2x_3, \qquad 2x_3x_1, \qquad 2x_1x_2$$

constitué par les polynomes harmoniques du second degré ; la seconde fournit le bivecteur

$$x_2x_3' - x_3x_2', \qquad x_3x_1' - x_1x_3', \qquad x_1x_2' - x_2x_1',$$

et la troisième fournit le scalaire

$$x_1x_1' + x_2x_2' + x_3x_3'.$$

70. Applications.— Considérons un champ de vecteurs V_1, V_2, V_3 : à chaque point (x_1, x_2, x_3) de l'espace on attache un vecteur de composantes V_1, V_2, V_3 fonctions données de (x_1, x_2, x_3). Les quantités $\frac{\partial V_i}{\partial x_j}$, quand on effectue un déplacement ou un retournement, se comportent comme le produit de deux vecteurs d'origine O, à savoir

$$\frac{\partial}{\partial x_1}, \qquad \frac{\partial}{\partial x_2}, \qquad \frac{\partial}{\partial x_3} \qquad \text{et} \qquad V_1, V_2, V_3.$$

Cherchons toutes les relations linéaires à coefficients constants entre les $\frac{\partial V_i}{\partial x_j}$ qui se conservent par un déplacement. Nous n'avons qu'à effectuer la décomposition du produit des deux vecteurs (symboliques) précédents et à égaler à zéro les composantes d'un

ou de plusieurs tenseurs irréductibles composants. En prenant un seul de ces tenseurs, nous aurons l'un des systèmes

$$a)\qquad \frac{\partial V_1}{\partial x_1} = \frac{\partial V_2}{\partial x_2} = \frac{\partial V_3}{\partial x_3}, \qquad \frac{\partial V_2}{\partial x_3} + \frac{\partial V_3}{\partial x_2} = 0, \qquad \frac{\partial V_3}{\partial x_1} + \frac{\partial V_1}{\partial x_3} = 0, \qquad \frac{\partial V_1}{\partial x_2} + \frac{\partial V_2}{\partial x_1} = 0;$$

$$b)\qquad \frac{\partial V_2}{\partial x_3} - \frac{\partial V_3}{\partial x_2} = 0, \qquad \frac{\partial V_3}{\partial x_1} - \frac{\partial V_1}{\partial x_3} = 0, \qquad \frac{\partial V_1}{\partial x_2} - \frac{\partial V_2}{\partial x_1} = 0;$$

$$c)\qquad \frac{\partial V_1}{\partial x_1} + \frac{\partial V_2}{\partial x_2} + \frac{\partial V_3}{\partial x_3} = 0.$$

Le cas *c*) donne les champs de vecteurs de divergence nulle ; le cas *b*) les champs de vecteurs de rotationnel nul; le cas *a*) donne le champ des vitesses dans un déplacement rigide.

Si l'on ne considérait que le groupe des déplacements proprement dits, le système

$$\frac{\partial V_2}{\partial x_3} - \frac{\partial V_3}{\partial x_2} = mV_1, \qquad \frac{\partial V_3}{\partial x_1} - \frac{\partial V_1}{\partial x_3} = mV_2, \qquad \frac{\partial V_1}{\partial x_2} - \frac{\partial V_2}{\partial x_1} = mV_3,$$

où m est une constante, serait invariant ; par un déplacement accompagné d'une symétrie, il se transformerait dans un système analogue, la constante m étant remplacée par $-m$. Ce système entraîne du reste la nullité de la divergence du champ de vecteurs.

71. Equations de Dirac. — On peut de même considérer le tenseur $\left(\frac{\partial \xi_0}{\partial x_i}, \frac{\partial \xi_1}{\partial x_i}\right)$ qui se transforme par un déplacement comme le produit d'un vecteur $\frac{\partial}{\partial x}$ par un spineur ξ. Or

$$\mathfrak{D}_1^+ \times \mathfrak{D}_{\frac{1}{2}}^+ = \mathfrak{D}_{\frac{3}{2}}^+ + \mathfrak{D}_{\frac{1}{2}}^-.$$

Le polynome générateur de $\mathfrak{D}_1^+ \times \mathfrak{D}_{\frac{1}{2}}^+$ est

$$(a\xi'_0 + b\xi'_1)^2(a'\xi_0 + b'\xi_1),$$

celui de $\mathfrak{D}_{\frac{3}{2}}^+$ est

$$\begin{aligned}
&(a\xi'_0 + b\xi'_1)^2(a\xi_0 + b\xi_1) \\
&\quad \sim \left[(b^2 - a^2)\frac{\partial}{\partial x_1} + i(b^2 + a^2)\frac{\partial}{\partial x_2} + 2ab\frac{\partial}{\partial x_3}\right](a\xi_0 + b\xi_1) \\
&\quad \sim -a^3\left(\frac{\partial \xi_0}{\partial x_1} - i\frac{\partial \xi_0}{\partial x_2}\right) + a^2 b\left(2\frac{\partial \xi_0}{\partial x_3} - \frac{\partial \xi_1}{\partial x_1} + i\frac{\partial \xi_1}{\partial x_2}\right) \\
&\quad + ab^2\left(2\frac{\partial \xi_1}{\partial x_3} + \frac{\partial \xi_0}{\partial x_1} + i\frac{\partial \xi_0}{\partial x_2}\right) + b^3\left(\frac{\partial \xi_1}{\partial x_1} + i\frac{\partial \xi_1}{\partial x_2}\right);
\end{aligned}$$

celui de $\overline{\mathfrak{D}}_{\frac{1}{2}}$ est

$$(\xi'_0\xi_1 - \xi'_1\xi_0)(a\xi'_0 + b\xi'_1) = a(-\xi'_0\xi'_1\xi_0 + \xi_0'^2\xi_1) + b(-\xi_1'^2\xi_0 + \xi'_0\xi'_1\xi_1)$$
$$\sim a\left[-\frac{\partial\xi_0}{\partial x_3} - \frac{\partial\xi_1}{\partial x_1} + i\,\frac{\partial\xi_1}{\partial x_2}\right] + b\left[-\frac{\partial\xi_0}{\partial x_1} - i\,\frac{\partial\xi_0}{\partial x_2} + \frac{\partial\xi_1}{\partial x_3}\right].$$

Les équations obtenues en annulant les composantes du tenseur $\overline{\mathfrak{D}}_{\frac{1}{2}}$, à savoir

$$\frac{\partial\xi_0}{\partial x_3} + \frac{\partial\xi_1}{\partial x_1} - i\,\frac{\partial\xi_1}{\partial x_2} = 0,$$
$$\frac{\partial\xi_0}{\partial x_1} + i\,\frac{\partial\xi_0}{\partial x_2} - \frac{\partial\xi_1}{\partial x_3} = 0,$$

appartiennent au type des *équations de Dirac* ; ce sont les plus simples de ce type.

Les équations

$$\frac{\partial\xi_0}{\partial x_3} + \frac{\partial\xi_1}{\partial x_1} - i\,\frac{\partial\xi_1}{\partial x_2} = m\xi_0,$$
$$\frac{\partial\xi_0}{\partial x_1} + i\,\frac{\partial\xi_0}{\partial x_2} - \frac{\partial\xi_1}{\partial x_3} = m\xi_1$$

se conservent par un déplacement, parce que les spineurs de première et de seconde espèce $\overset{+}{\mathfrak{D}}_{\frac{1}{2}}$ et $\overline{\mathfrak{D}}_{\frac{1}{2}}$ se transforment de la même manière par une rotation ; par une symétrie ces équations se transforment dans les équations de même nature, la constante m étant changée de signe.

Nous remarquerons que les équations de Dirac peuvent encore s'écrire symboliquement

$$\frac{\partial}{\partial x}\,\xi = 0,$$

$\frac{\partial}{\partial x}$ étant la matrice associée au vecteur $\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3}$. Par multiplication à gauche par $\frac{\partial}{\partial x}$ on obtient, en remarquant que le carré de $\frac{\partial}{\partial x}$ est égal à $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}$, les équations

$$\Delta\xi_0 = 0, \qquad \Delta\xi_1 = 0.$$

Les équations obtenues en annulant les composantes de $\mathfrak{D}^{+}_{\frac{3}{2}}$, à savoir

$$\frac{\partial \xi_0}{\partial x_1} - i\frac{\partial \xi_0}{\partial x_2} = 0, \qquad \frac{\partial \xi_1}{\partial x_1} + i\frac{\partial \xi_1}{\partial x_2} = 0, \qquad 2\frac{\partial \xi_0}{\partial x_3} - \frac{\partial \xi_1}{\partial x_1} + i\frac{\partial \xi_1}{\partial x_2} = 0,$$
$$2\frac{\partial \xi_1}{\partial x_3} + \frac{\partial \xi_0}{\partial x_1} + i\frac{\partial \xi_0}{\partial x_2} = 0$$

donnent

$$\xi_0 = b(-x_1 + ix_2) + ax_3 + h, \qquad \xi_1 = a(x_1 + ix_2) + bx_3 + k,$$

a, b, h, k étant quatre constantes arbitraires.

II. — LES ROTATIONS INFINITÉSIMALES ET LA DÉTERMINATION DES TENSEURS EUCLIDIENS.

72. Les rotations infinitésimales de l'espace E_3.— Nous abordons maintenant la recherche de toutes les représentations linéaires du groupe des rotations. Nous avons déjà considéré (nº **19**) les rotations infinitésimales, qui, appliquées aux vecteurs, définissent des champs de vitesses dans le mouvement d'un solide ayant un point fixe. La rotation infinitésimale la plus générale appliquée à un vecteur x_1, x_2, x_3 est représentée par une matrice du troisième ordre, combinaison linéaire, à coefficients (complexes ou réels), de trois matrices de base, par exemple de celles qui représentent les rotations de vitesse angulaire 1 autour des trois axes de coordonnées ; ces trois matrices sont

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Appliquées aux spineurs les rotations fournissent des matrices analogues. La rotation d'angle θ autour de $\vec{e}_3$ est représentée, comme nous l'avons vu (nº **59**), par la matrice

$$\cos\frac{\theta}{2} - iH_3 \sin\frac{\theta}{2} = 1 - \frac{i}{2}\theta H_3 + \cdots$$

La rotation de vitesse angulaire 1 est donc représentée par $-\frac{1}{2}iH_3$. On a donc maintenant les matrices

$$-\frac{1}{2}iH_1 = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \qquad -\frac{1}{2}iH_2 = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$
$$-\frac{1}{2}iH_3 = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}.$$

73. Définition précise des représentations à déterminer. — Considérons maintenant une représentation linéaire quelconque du groupe des rotations, univalente ou non. Il importe d'indiquer d'une manière précise ce que nous entendons par là.

Donnons-nous dans le groupe des rotations un voisinage suffisamment petit de la rotation identique, par exemple l'ensemble des rotations d'un angle inférieur à un angle fixe $\alpha \leqslant \pi$. Faisons correspondre à chaque rotation $\mathfrak{R}$ de ce voisinage une matrice d'ordre donné S et une seule satisfaisant aux conditions suivantes :

1° Les éléments de S sont des fonctions continues des paramètres dont dépend $\mathfrak{R}$;

2° Si $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{R}'$ et $\mathfrak{R}\mathfrak{R}'$ appartiennent au voisinage donné, le produit SS' des matrices correspondant à $\mathfrak{R}$ et $\mathfrak{R}'$ est égal à la matrice qui correspond à $\mathfrak{R}\mathfrak{R}'$.

Cela posé, toute rotation d'angle quelconque peut être obtenue comme produit d'un nombre fini de rotations du voisinage donné : nous lui ferons correspondre la matrice produit des matrices qui correspondent à ces différentes rotations. Nous aurons ainsi ce que nous appellerons une représentation du groupe des rotations. Les matrices opérant sur les spineurs et que nous avons fait correspondre aux différentes rotations satisfont aux conditions précédentes, l'angle α étant égal à π.

Le fait que la représentation n'est pas univalente tient à ce que la matrice S étant suivie par continuité quand la rotation à laquelle elle correspond varie par continuité de manière que cette rotation revienne à sa détermination initiale, la matrice S peut ne pas revenir à sa détermination initiale.

74. Un théorème fondamental. — Les substitutions linéaires attachées à une représentation linéaire forment un groupe linéaire tel que les éléments des matrices représentatives soient des fonctions continues des paramètres dont elles dépendent (*groupe linéaire continu*). On démontre le théorème fondamental suivant [1] :

---

[1] Ce théorème est dû à J. VON NEUMANN : c'est un cas particulier d'un théorème plus général dû à E. CARTAN (*La théorie des groupes finis et continus et l'Analysis situs* (Mém. Sc. Math., XLII, 1930, n° 26, p. 22).

THÉORÈME. — *Tout groupe linéaire continu est engendré par des transformations infinitésimales.*

Cela veut dire en particulier, dans le cas qui nous occupe, que lorsque la rotation $\mathcal{R}$ se fait autour de l'axe $\overrightarrow{e_i}$, l'angle de rotation étant $\theta_i < \alpha$, la matrice S correspondante jouit de la propriété que $\frac{S-1}{\theta_i}$ tend, lorsque θ_i tend vers zéro, vers une matrice déterminée R_i, qui représente donc la rotation infinitésimale autour de $\overrightarrow{e_i}$ de vitesse angulaire 1. Plus généralement la rotation infinitésimale de vitesse angulaire 1 autour de l'axe de cosinus directeurs α, β, γ est représentée par la matrice

$$\alpha R_1 + \beta R_2 + \gamma R_3.$$

Enfin si on imagine une suite continue de rotations dépendant d'un paramètre t et si on fait subir aux composantes u_i de la représentation linéaire considérée cette suite continue de rotations, ces composantes satisfont à un système d'équations différentielles linéaires de la forme

$$\frac{du}{dt} = p^1(t) R_1 u + p^2(t) R_2 u + p^3(t) R_3 u.$$

De là résulte que si l'on connaît les matrices R_1, R_2, R_3, on peut déterminer les matrices S par l'intégration d'équations différentielles linéaires. D'une manière plus précise on intégrera les équations

$$\frac{du}{dt} = \alpha R_1 u + \beta R_2 u + \gamma R_3 u,$$

α, β, γ étant trois cosinus directeurs paramétriques ; les expressions qui donnent, dans l'espace de la représentation linéaire, le vecteur u en fonction de t et de sa valeur initiale u_0 fournissent, pour toutes les valeurs suffisamment petites de t, des substitutions linéaires dont les éléments sont des fonctions *analytiques* de αt, βt, γt : ces substitutions correspondent à la rotation d'angle t autour de l'axe (α, β, γ). On complètera ensuite la représentation comme il a été dit plus haut.

75. Les représentations du groupe des rotations réelles et les représentations analytiques du groupe des rotations complexes. — S'il s'agit des rotations réelles dans l'espace euclidien réel, les paramètres αt, βt, γt sont réels. S'il s'agit d'un espace pseudo-

euclidien réel, il faudra prendre une combinaison linéaire à coefficients réels des trois matrices qui correspondent à trois rotations infinitésimales réelles linéairement indépendantes. Si enfin il s'agit des rotations complexes, on prendra pour αt, βt, γt des paramètres complexes quelconques. Nous déduisons de là le théorème suivant.

THÉORÈME. — *Toute représentation linéaire du groupe des rotations réelles fournit une représentation linéaire du groupe des rotations complexes.*

Il suffit dans les éléments des matrices de la représentation, qui sont des fonctions analytiques des paramètres réels de la rotation réelle, de substituer à ces paramètres réels des paramètres complexes ; nous dirons que la seconde représentation (groupe des rotations complexes) se déduit de la première (groupe des rotations réelles) *par le passage du réel au complexe.* Les représentations obtenues ainsi du groupe des rotations complexes seront dites *analytiques* ; il existe, comme nous le verrons, des représentations *non analytiques* (nos **82-84**).

Enfin le passage du réel au complexe conserve le caractère d'irréductibilité d'une représentation linéaire, car si une représentation analytique du groupe complexe était réductible, celle du groupe réel, qui en est un sous-groupe, serait *a fortiori* réductible.

Il existe donc une correspondance biunivoque entre

1° les représentations analytiques irréductibles du groupe des rotations complexes ;

2° les représentations irréductibles du groupe des rotations réelles dans l'espace euclidien réel ;

3° les représentations irréductibles du groupe des rotations réelles propres dans l'espace pseudo-euclidien réel.

Il importe en effet de se limiter dans ce dernier cas aux rotations propres, l'ensemble des rotations ne formant pas un groupe continu.

76. Equations de structure.— Il existe entre les matrices R_1, R_2, R_3 représentant les rotations infinitésimales dans une représentation linéaire quelconque, certaines relations que nous allons indiquer.

Partons pour cela de deux familles de rotations dépendant analytiquement chacune d'un paramètre et se réduisant à la rotation identique quand ce paramètre est nul. Soient $s(u)$ et $s(v)$

les matrices qui les représentent quand les rotations opèrent sur les vecteurs. Nous supposerons pour simplifier que la première rotation est une rotation d'un angle u autour de l'axe (α, β, γ) et que la seconde est une rotation d'un angle v autour de l'axe $(\alpha', \beta', \gamma')$. Formons la rotation de matrice

$$s = s(u)s(v)s(-u)s(-v) ;$$

cette matrice est développable suivant les puissances de u et de v ; elle se réduit à 1 pour $u = v = 0$; d'autre part elle se réduit également à 1 si l'on fait $v = 0$ ou si l'on fait $u = 0$; par suite tous les termes du développement, autres que le premier, contiendront uv en facteur ; la partie principale de $S - 1$ sera par suite de la forme $uv\rho$, ρ étant une matrice qui représente une rotation infinitésimale. Pour avoir cette matrice ρ, il suffit d'effectuer le produit $s(u)\, s(v)\, s(-u)\, s(-v)$ en se limitant dans chaque facteur au terme du premier degré, soit

$$s(u) = 1 + u\rho_1, \quad s(v) = 1 + v\rho_2, \quad s(-u) = 1 - u\rho_1, \quad s(-v) = 1 - v\rho_2.$$

On en déduit facilement

$$s = 1 + uv(\rho_1\rho_2 - \rho_2\rho_1) + \cdots$$

Par suite on arrive au théorème suivant :

Si ρ_1 et ρ_2 sont les matrices représentant deux rotations infinitésimales opérant sur les vecteurs, la matrice $\rho_1\rho_2 - \rho_2\rho_1$ représente également une rotation infinitésimale.

Mais ce qu'il importe de remarquer, c'est que si l'on considère une représentation linéaire quelconque du groupe des rotations, d'après la manière même dont nous sommes arrivés à la matrice $\rho_1\rho_2 - \rho_2\rho_1$, nous pouvons affirmer qu'à la rotation infinitésimale $\rho_1\rho_2 - \rho_2\rho_1$ correspond dans la représentation linéaire la matrice $R_1R_2 - R_2R_1$, en appelant R_1 et R_2 les matrices qui corpondent à ρ_1 et ρ_2.

En particulier *si* R_1, R_2, R_3 *sont les matrices qui représentent les rotations infinitésimales de base d'une représentation linéaire, les trois matrices* $R_2R_3 - R_3R_2$, $R_3R_1 - R_1R_3$, $R_1R_2 - R_2R_1$ *sont des combinaisons linéaires de* R_1, R_2, R_3, *et les coefficients de ces combinaisons linéaires sont les mêmes pour toutes les représentations linéaires du groupe des rotations.*

Prenons en particulier le groupe des spineurs, pour lequel

$$R_1 = -\frac{1}{2}\, iH_1, \qquad R_2 = -\frac{1}{2}\, iH_2, \qquad R_3 = -\frac{1}{2}\, iH_3 ;$$

on a

$$R_1R_2 - R_2R_1 = -\frac{1}{4}(H_1H_2 - H_2H_1) = -\frac{1}{2}H_1H_2 = -\frac{1}{2}iH_3 = R_3,$$

et deux autres relations analogues, d'où le

THÉORÈME. — *Les matrices* R_1, R_2, R_3 *qui, dans une représentation linéaire quelconque du groupe des rotations, représentent les rotations de vitesse angulaire* 1 *autour des axes de coordonnées satisfont aux relations de structure*

$$R_2R_3 - R_3R_2 = R_1, \qquad R_3R_1 - R_1R_3 = R_2, \qquad R_1R_2 - R_2R_1 = R_3.$$

Il est facile de vérifier ces relations quand on prend les matrices qui opèrent sur les vecteurs :

$$R_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad R_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad R_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ce théorème admet une réciproque, qui est un cas particulier du *deuxième théorème fondamental* de la théorie des groupes, mais dont nous n'aurons pas besoin.

77. Représentations irréductibles du groupe des rotations. — Arrivons maintenant à la détermination des représentations linéaires du groupe des rotations. Nous allons substituer aux matrices inconnues R_1, R_2, R_3 trois combinaisons linéaires convenables, à savoir

$$(1) \qquad \left\{ \begin{aligned} A &= R_1 - iR_2, \\ B &= \frac{1}{2}(R_1 + iR_2), \\ C &= iR_3 ; \end{aligned} \right.$$

on a les nouvelles relations de structure

$$(2) \qquad AB - BA = C, \qquad AC - CA = A, \qquad BC - CB = -B.$$

Cherchons d'abord toutes les représentations irréductibles. Soit λ une valeur propre de la matrice C ; il existe, dans l'espace de la représentation, un vecteur u tel que $Cu = \lambda u$: nous dirons qu'il appartient à la valeur propre λ. Les équations (2) donnent

$$CAu = (\lambda - 1)Au, \qquad CBu = (\lambda + 1)Bu,$$

de sorte que si le vecteur Au n'est pas nul, la matrice C admet la valeur propre $\lambda - 1$, et si Bu n'est pas nul, la matrice C admet la valeur propre $\lambda + 1$.

Supposons choisie la valeur propre λ de C de telle sorte que $\lambda + 1$ ne soit plus une valeur propre. On a alors $\mathrm{B}u = 0$. Des relations

$$\mathrm{C}u = \lambda u, \qquad \mathrm{B}u = 0$$

on déduit, par application au vecteur u des relations (2),

$$\mathrm{CA}u = (\lambda - 1)\mathrm{A}u, \qquad \mathrm{BA}u = -\lambda u,$$

puis, en appliquant les mêmes relations à $\mathrm{A}u$, A^2u, etc.,

$$\begin{array}{ll} \mathrm{CA}^2u = (\lambda - 2)\mathrm{A}^2u, & \mathrm{BA}^2u = (1 - 2\lambda)\mathrm{A}u, \\ \mathrm{CA}^3u = (\lambda - 3)\mathrm{A}^3u, & \mathrm{BA}^3u = (3 - 3\lambda)\mathrm{A}^2u, \\ \dots\dots\dots & \\ \mathrm{CA}^pu = (\lambda - p)\mathrm{A}^pu, & \mathrm{BA}^pu = p\left(\dfrac{p-1}{2} - \lambda\right)\mathrm{A}^{p-1}u. \end{array}$$

Le nombre des vecteurs indépendants de l'espace étant limité, il existera un entier p tel que $\mathrm{A}^{p+1}u$ soit une combinaison linéaire de u, $\mathrm{A}u$, $\cdots$, A^pu. Supposons que p soit le plus petit entier jouissant de cette propriété, et soit

$$\mathrm{A}^{p+1}u = \alpha_0 u + \alpha_1\mathrm{A}u + \alpha_2\mathrm{A}^2u \cdots + \alpha_p\mathrm{A}^pu\ ;$$

en multipliant à gauche par B, on aura une relation analogue, à savoir

$$(p+1)\left(\frac{p}{2} - \lambda\right)\mathrm{A}^pu = -\alpha_1\lambda u + \alpha_2(1-2\lambda)\mathrm{A}u + \cdots + \alpha_p p\left(\frac{p-1}{2} - \lambda\right)\mathrm{A}^{p-1}u\ ;$$

cela n'est possible que si tous les coefficients de cette relation sont nuls, d'où

$$p = 2\lambda, \qquad \alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_p = 0\ ;$$

il resterait donc $\mathrm{A}^{p+1}u = \alpha_0 u$, mais en multipliant par C, on trouve

$$(\lambda - p - 1)\mathrm{A}^{p+1}u = \alpha_0\lambda u, \qquad \text{d'où} \qquad (p+1)\alpha_0 = 0, \qquad \alpha_0 = 0\ ;$$

par suite on a

$$\mathrm{A}^{p+1}u = 0, \qquad \lambda = \frac{p}{2}.$$

Il en résulte que les vecteurs indépendants u, $\mathrm{A}u$, $\cdots$, A^pu sont transformés linéairement entre eux par les rotations infinitésimales et par suite par les rotations finies. La représentation étant irréductible est donc de degré $p + 1$; elle est *parfaitement déterminée* par l'entier p, puisqu'on a

$$\mathrm{C}u = \frac{p}{2}u, \quad \mathrm{CA}u = \left(\frac{p}{2} - 1\right)\mathrm{A}u, \quad \mathrm{CA}^2u = \left(\frac{p}{2} - 2\right)\mathrm{A}^2u, \cdots, \quad \mathrm{CA}^pu = -\frac{p}{2}\mathrm{A}^pu\ ;$$

$$\mathrm{B}u = 0, \quad \mathrm{BA}u = -\frac{p}{2}u, \quad \mathrm{BA}^2u = (1-p)\mathrm{A}^2u, \cdots, \quad \mathrm{BA}^pu = -\frac{p}{2}\mathrm{A}^{p-1}u.$$

On arrive ainsi au théorème suivant :

THÉORÈME. — *Il existe au plus une représentation linéaire irréductible de degré donné.*

Comme nous avons précédemment démontré l'existence d'une représentation irréductible de tout degré donné, il en résulte qu'il n'y en a pas d'autres que celles que nous avons indiquées.

Remarquons que le cas $p = 0$ donne une représentation de degré 1 pour laquelle les matrices A, B, C sont toutes nulles ; cette représentation est $u' = u$.

78. Les représentations réductibles. — Reprenons une représentation linéaire quelconque. Si elle n'est pas irréductible, il existe des vecteurs indépendants des vecteurs u, $\mathrm{A}u$, ..., $\mathrm{A}^p u$ qui ont été déjà considérés, et au sujet desquels nous pouvons toujours supposer que $\frac{p}{2}$ est la plus grande valeur propre de la matrice C. Supposons d'abord qu'il existe au moins un vecteur v indépendant de u appartenant à la même valeur propre $\frac{p}{2}$ de C. En faisant sur v les mêmes raisonnements qui ont été faits sur u, on en déduira l'existence de $p+1$ vecteurs v, $\mathrm{A}v$, ..., $\mathrm{A}^p v$ se transformant linéairement entre eux d'une manière irréductible. On continuera de la même manière tant qu'on trouvera de nouveaux vecteurs appartenant à la valeur propre $\frac{p}{2}$ de C ; on obtiendra ainsi par exemple h suites de $p + 1$ vecteurs dans chacune desquelles les $p + 1$ vecteurs sont transformés d'une manière irréductible. Les $h(p + 1)$ vecteurs obtenus sont linéairement indépendants ; en effet ils se transforment comme les vecteurs d'une représentation linéaire qui se décompose en h parties irréductibles équivalentes et on sait qu'alors toute relation linéaire entre les $h(p + 1)$ vecteurs considérés ne peut s'obtenir (nº **34**) qu'en annulant tous les vecteurs d'une de ces parties, ou du moins tous les vecteurs

$$\begin{gathered} a_1 u + a_2 v + \cdots + a_h w, \\ a_1 \mathrm{A}u + a_2 \mathrm{A}v + \cdots + a_h \mathrm{A}w, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ; \end{gathered}$$

mais entre les vecteurs $u, v, .., w$ appartenant à la valeur propre $\frac{p}{2}$ il n'existe par hypothèse aucune relation linéaire. Par suite les $h(p + 1)$ vecteurs des h séries sont bien linéairement indépendants. Soit E_1 l'espace linéaire qu'ils déterminent.

Supposons maintenant que le degré de la représentation soit supérieur à $h(p+1)$ et qu'il existe des valeurs propres de C fournissant des vecteurs non situés dans l'espace E_1. Soit $\frac{q}{2} < \frac{p}{2}$ la plus grande de ces valeurs propres. Soit s un vecteur tel que $Cs = \frac{q}{2} s$; le vecteur Bs, qui appartient à la valeur propre $\frac{q}{2} + 1$, est contenu nécessairement dans E_1 ; étant contenu dans E_1, il peut se déduire par l'opération B d'un autre vecteur t de E_1 appartenant à la valeur propre $\frac{q}{2}$; en remplaçant alors s par $s - t$, qui n'appartient pas à E_1, on voit que $B(s-t) = 0$. En définitive, en changeant les notations, nous avons un vecteur s n'appartenant pas à E_1 et satisfaisant aux relations

$$Cs = \frac{q}{2} s, \qquad Bs = 0.$$

On peut alors répéter les raisonnements faits au début et trouver une suite de $q+1$ vecteurs $s, As, \ldots, A^q s$ transformés entre eux d'une manière irréductible.

On continuera le procédé tant que cela sera possible et on arrivera ainsi à un espace E_2 transformé par le groupe des rotations suivant un groupe complètement réductible, et contenant tous les vecteurs qui appartiennent à une valeur propre de C.

Si l'espace E_2 se confond avec l'espace E de la représentation donnée, cette représentation est complètement réductible. Nous allons démontrer qu'il en est bien ainsi.

79. Théorème de complète réductibilité. — Nous allons changer nos notations et prendre dans l'espace E_2 une base formée des vecteurs $u^{(1)}, u^{(2)}, \cdots, u^{(\nu)}$ qui appartiennent aux différentes valeurs propres de C. La valeur propre λ_α à laquelle appartient $u^{(\alpha)}$ est un entier ou la moitié d'un entier. Rappelons qu'il existe autant de vecteurs indépendants appartenant à la valeur propre $-\lambda_\alpha$ qu'à la valeur propre λ_α et que, si $\lambda_\alpha \geqslant 1$, tout vecteur appartenant à la valeur propre λ_α peut s'obtenir en appliquant l'opération B à un vecteur appartenant à la valeur propre $\lambda_\alpha - 1$.

Cela posé supposons que l'espace E_2 soit de dimension ν inférieure à la dimension n de E. Si nous convenons de regarder comme égaux deux vecteurs de E dont la différence géométrique

appartient à E_2, nous avons dans un espace $E' = E/E_2$ de dimension $n - \nu$ une représentation linéaire du groupe des rotations. Soit μ une valeur propre de C dans cette représentation, telle que $\mu + 1$ ne soit pas une valeur propre. Il existe dans E un vecteur v n'appartenant pas à E_2 et tel qu'on ait

$$Cv = \mu v + \alpha_i u^{(i)}.$$

Si nous considérons le vecteur

$$w = v + \beta_i u^{(i)},$$

nous aurons par un calcul facile

$$Cw = \mu w + [\alpha_i + \beta_i(\lambda_i - \mu)]u^{(i)}.$$

Il résulte de là

1° que μ est une des valeurs propres de C opérant sur E_2 ; sinon en effet on pourrait disposer des constantes β de manière à annuler tous les coefficients $\alpha_i + \beta_i(\lambda_i - \mu)$ et le vecteur w, *qui n'appartient pas à* E_2, se reproduirait multiplié par μ, ce qui est contraire à l'hypothèse ;

2° que l'on peut choisir les constantes β_i de manière que $Cw - \mu w$ appartienne à la valeur propre μ.

Posons $\mu = \frac{r}{2}$ et

$$Cw = \frac{r}{2} w + u,$$

u appartenant à la valeur propre $\frac{r}{2}$. On en déduit, d'après (2),

$$CBw = \left(\frac{r}{2} + 1\right)Bw + Bu.$$

Si le vecteur Bu n'est pas nul, il faut que le vecteur Bw soit contenu dans E_2, à cause de l'hypothèse faite sur μ ; il en est de même du reste si le vecteur Bu est nul. Le vecteur Bw appartenant à E_2, la différence $CBw - \left(\frac{r}{2} + 1\right) Bw$ est, comme on le voit facilement, une combinaison linéaire de vecteurs appartenant à des valeurs propres toutes distinctes de $\frac{r}{2} + 1$; comme Bu appartient précisément à la valeur propre $\frac{r}{2} + 1$, c'est que $Bu = 0$. Enfin comme $\frac{r}{2} + 1 \geqslant 1$, on peut trouver dans E_2 un vecteur u' appartenant à

la valeur propre $\frac{r}{2}$ tel que $Bw = Bu'$. En posant enfin $s = w - u'$, on trouve les relations fondamentales

$$(3) \qquad Cs = \frac{r}{2}s + u, \qquad Bs = 0, \qquad Bu = 0.$$

Le vecteur u engendre une suite de $r+1$ vecteurs $u, Au, \cdots, A^r u$ transformés d'une manière irréductible, avec $A^{r+1}u = 0$. Voyons comment se transforment les vecteurs $s, As, \ldots, A^r s, A^{r+1}s$. Des calculs analogues à des calculs antérieurs et reposant sur les relations de structure (2) donnent

$$CAs = \left(\frac{r}{2} - 1\right)As + Au, \qquad CA^2s = \left(\frac{r}{2} - 2\right)A^2s + A^2u, \cdots,$$

$$CA^h s = \left(\frac{r}{2} - h\right)A^h s + A^h u, \cdots;$$

$$BAs = -\frac{r}{2}s - u, \qquad BA^2s = (1-r)As - 2Au, \cdots,$$

$$BA^h s = \frac{h}{2}(h-1-r)A^{h-1}s - hA^{h-1}u, \cdots$$

Soit $A^{h+1}s$ le premier des vecteurs $s, As, A^2s, \ldots$, qui dépende linéairement des précédents et de $u, Au, A^2u, \ldots, A^r u$:

$$A^{h+1}s = \alpha_0 s + \alpha_1 As + \cdots + \alpha_h A^h s + \beta_0 u + \beta_1 Au + \cdots + \beta_r A^r u\,;$$

en appliquant aux deux membres de cette relation l'opération B, on aura une nouvelle relation dans laquelle ne figurera pas $A^{h+1}s$, et qui devra par suite être une identité. Or, dans cette nouvelle relation, le coefficient de $A^h s$ est $\frac{(h+1)(h-r)}{2}$; on a donc $h = r$; de plus dans cette même relation, le coefficient de $A^r u$ est égal à $-(r+1)$ dans le premier membre et à zéro dans le second membre. *On arrive donc à une impossibilité.* Il est donc absurde de supposer que l'espace E_2 ne soit pas confondu avec E, d'où le

THÉORÈME. — *Toute représentation linéaire du groupe des rotations* (analytique s'il s'agit du groupe des rotations complexes) *est complètement réductible.*

80. La matrice $R_1^2 + R_2^2 + R_3^2$. — En Mécanique quantique les représentations irréductibles du groupe des rotations réelles jouent un rôle important ; chacune d'elles correspond à un des *états* d'un atome d'hélium ; les matrices correspondantes $\frac{h}{i}R_1$,

$\frac{h}{i}R_2$, $\frac{h}{i}R_3$ représentent les composantes des moments cinétiques correspondants ; le carré du moment cinétique est donné par la matrice $-h^2(R_1^2+R_2^2+R_3^2)$. Nous allons voir que cette matrice est le produit de la matrice unité par un nombre positif.

En effet dans une représentation quelconque du groupe des rotations *la matrice* $R_1^2+R_2^2+R_3^2$ *commute avec chacune des matrices* R_1, R_2, R_3 ; on a par exemple

$$\begin{aligned}R_1(R_1^2+R_2^2+R_3^2)-(R_1^2+R_2^2+R_3^2)R_1&=R_1R_2^2-R_2^2R_1+R_1R_3^2-R_3^2R_1\\&=(R_2R_1+R_3)R_2-R_2(R_1R_2-R_3)+(R_3R_1-R_2)R_3-R_3(R_1R_3+R_2)=0.\end{aligned}$$

Si la représentation est irréductible, il en résulte (nº **32**) [1] que $R_1^2+R_2^2+R_3^2$ est un multiple de la matrice unité. Elle reproduit donc tous les vecteurs en les multipliant par un seul et même facteur.

On a du reste en posant, comme nous l'avons déjà fait (nº **77**),

$$A=R_1-iR_2, \qquad B=\frac{1}{2}(R_1+iR_2), \qquad C=iR_3,$$

la relation

$$AB+BA-C^2=R_1^2+R_2^2+R_3^2. \tag{4}$$

Cela posé si on prend la représentation irréductible $\mathfrak{D}_{\frac{p}{2}}$, on a pour le vecteur u correspondant à la valeur propre $\frac{p}{2}$ de C, les relations

$$Cu=\frac{p}{2}u, \qquad Bu=0, \qquad BAu=-\frac{p}{2}u,$$

d'où

$$ABu+BAu-CCu=-\frac{p}{2}\left(1+\frac{p}{2}\right)u,$$

et par suite

$$R_1^2+R_2^2+R_3^2=-\frac{p}{2}\left(\frac{p}{2}+1\right).$$

THÉORÈME. — *Dans la représentation irréductible $\mathfrak{D}_j$, la matrice $R_1^2+R_2^2+R_3^2$ est égale à $-j(j+1)$.*

---

[1] En réalité le théorème invoqué s'applique aux matrices échangeables avec toutes les matrices représentatives des transformations *finies* d'un groupe ; mais la matrice correspondant à une rotation d'angle θ provenant d'une rotation infinitésimale R est

$$S=1+\theta R+\frac{\theta^2R^2}{2}+\frac{\theta^3R^3}{3!}+\cdots,$$

et il est clair que si $R_1^2+R_2^2+R_3^2$ commute avec R, elle commute avec S.

81. Remarques. — MM. H. Casimir et B. L. van der Waerden (¹) et, plus simplement, M. J. H. C. Whitehead (²) ont utilisé la considération de la matrice $R_1^2 + R_2^2 + R_3^2$, ou plutôt d'une matrice analogue la généralisant, pour démontrer la réductibilité complète des représentations linéaires de groupes plus généraux que le groupe des rotations, à savoir des groupes semi-simples, qui comprennent en particulier le groupe des rotations d'un espace à un nombre quelconque de dimensions. Auparavant M. H. Weyl avait donné du même théorème une démonstration transcendante (³) s'appliquant à tous les groupes *clos* ou *compacts* et par suite à tous ceux qui s'en déduisent par le passage du réel au complexe (réserve faite que pour ces derniers il ne s'agit que des représentations analytiques, mais réserve qu'on lève facilement).

En résumé *nous avons démontré le théorème de complète réductibilité et nous avons trouvé toutes les représentations irréductibles dans le cas du groupe des rotations de l'espace euclidien réel et du groupe des rotations propres de l'espace pseudo-euclidien réel.* En ce qui concerne le groupe des rotations de l'espace euclidien complexe, il en est de même, mais en se limitant aux représentations linéaires analytiques.

III. — LES REPRÉSENTATIONS LINÉAIRES DU GROUPE DES ROTATIONS COMPLEXES.

82. Réduction du problème. — Il nous reste à déterminer toutes les représentations linéaires continues du groupe des rotations complexes. Nous savons (nº **84**) qu'en appelant α, β, γ les trois paramètres complexes d'une rotation et posant

$$\alpha = \alpha_1 + i\alpha_2, \qquad \beta = \beta_1 + i\beta_2, \qquad \gamma = \gamma_1 + i\gamma_2,$$

les éléments des matrices qui définissent une telle représentation sont des fonctions analytiques des 6 paramètres réels $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, \gamma_1, \gamma_2$. En passant du réel au complexe, nous aurons un groupe linéaire dont les coefficients seront des fonctions analytiques des 6 paramètres *complexes* $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, \gamma_1, \gamma_2$, ou encore des 6 paramètres

---

(¹) Math. Ann., 111, 1935, p. 1-12.

(²) Quarterly J. of Math., 8, 1937, p. 220-237.

(³) H. Weyl, *Theorie der Darstellung kontinuierlicher halb-einfacher Gruppen durch lineare Transformationen* (Math. Zeitschr., 23, 1925, p. 289 sqq.).

complexes $\alpha_1 + i\alpha_2, \beta_1 + i\beta_2, \gamma_1 + i\gamma_2, \alpha_1 - i\alpha_2, \beta_1 - i\beta_2, \gamma_1 - i\gamma_2$, c'est-à-dire des 6 paramètres complexes $\alpha, \beta, \gamma, \overline{\alpha}, \overline{\beta}, \overline{\gamma}$ où l'on a posé $\overline{\alpha} = \alpha_1 - i\alpha_2, \cdots$, et *ces* 6 *paramètres sont indépendants.*

Il est clair que ce groupe linéaire fournit une représentation du groupe $\mathcal{G}$ obtenu en considérant les rotations de paramètres α, β, γ et les rotations de paramètres $\overline{\alpha}, \overline{\beta}, \overline{\gamma}$. Ce groupe $\mathcal{G}$ est ce qu'on appelle le produit direct du groupe G des rotations (α, β, γ) et du groupe G$'$ des rotations $(\overline{\alpha}, \overline{\beta}, \overline{\gamma})$; chaque opération de $\mathcal{G}$ est l'ensemble $(\mathfrak{R}, \overline{\mathfrak{R}})$ d'une rotation $\mathfrak{R}$ de paramètres α, β, γ et d'une rotation $\overline{\mathfrak{R}}$ de paramètres $\overline{\alpha}, \overline{\beta}, \overline{\gamma}$, le produit de deux opérations de $\mathcal{G}$, à savoir $(\mathfrak{R}, \overline{\mathfrak{R}})$ et $(\mathfrak{R}', \overline{\mathfrak{R}}')$, étant l'opération $(\mathfrak{R}\mathfrak{R}', \overline{\mathfrak{R}}\overline{\mathfrak{R}}')$. Ce groupe $\mathcal{G}$ contient le sous-groupe G des opérations $(\mathfrak{R}, 1)$ où $\overline{\mathfrak{R}}$ est la rotation identique et le groupe G$'$ des opérations $(1, \overline{\mathfrak{R}})$ où $\mathfrak{R}$ est la rotation identique ; les opérations de G et de G$'$ sont manifestement échangeables entre elles et toute opération de $\mathcal{G}$ est d'une manière et d'une seule le produit d'une opération de G par une opération de G$'$. On dit que $\mathcal{G}$ est le produit direct de G et de G$'$, et on écrit $\mathcal{G} = \mathrm{G} \times \mathrm{G}'$.

Nous sommes donc finalement ramenés au problème suivant :

PROBLÈME. — *Etant donnés deux groupes* G *et* G$'$ *et leur produit direct* $\mathrm{G} \times \mathrm{G}' = \mathcal{G}$, *on connaît toutes les représentations linéaires analytiques de chacun des groupes* G *et* G$'$; *en déduire toutes les représentations linéaires analytiques de* $\mathcal{G}$.

Nous rappelons qu'une représentation est analytique quand les éléments des matrices correspondantes sont des fonctions analytiques des paramètres complexes du groupe.

Dans le cas qui nous occupe nous connaissons toutes les représentations analytiques des groupes G et G$'$ (qui sont du reste les mêmes, mais dont on regarde les paramètres comme distincts).

83. Représentations linéaires du produit direct de deux groupes. — Supposons que le théorème de complète réductibilité soit vrai pour chacun des groupes composants G et G$'$, ce qui se passe effectivement dans notre cas. Toute représentation linéaire de $\mathcal{G}$ fournit une représentation linéaire de son sous-groupe G ; par hypothèse cette représentation peut être décomposée en un certain nombre de représentations irréductibles. Considérons l'une

d'elles de degré r et supposons qu'il y en ait $h - 1$ autres équivalentes à celle-là ; soient

$$x_1^{(\alpha)}, \quad x_2^{(\alpha)}, \cdots, \quad x_r^{(\alpha)} \qquad (\alpha = 1, 2, \cdots, h)$$

les composantes de ces h représentations irréductibles. Soit s une opération de G, t une opération de G′ ; appelons $y_1^{(\alpha)}, y_2^{(\alpha)}, \cdots, y_r^{(\alpha)}$ les variables transformées de $x_1^{(\alpha)}, \cdots, x_r^{(\alpha)}$ par l'opération t ; s et t commutent :

$$st = ts ;$$

si alors on applique aux variables $x_1^{(\alpha)}, \cdots, x_r^{(\alpha)}$ d'abord l'opération s puis l'opération t, la variable $x_i^{(\alpha)}$ se transforme d'abord en $a_i^k x_k^{(\alpha)}$, puis en $a_i^h y_h^{(\alpha)}$; si au contraire on applique d'abord l'opération t, $x_i^{(\alpha)}$ se transforme en $y_i^{(\alpha)}$, par suite l'opération s appliquée à $y_i^{(\alpha)}$ donne $a_i^h y_h^{(\alpha)}$. Autrement dit par les opérations de G les composantes $y_i^{(\alpha)}$ se transforment comme les $x_i^{(\alpha)}$. Par suite on a (nº 33)

$$y_i^{(\alpha)} = b_\beta^\alpha x_i^{(\beta)}.$$

En définitive par l'opération st, on a la transformation

$$x_i^{(\alpha)} \to a_i^k b_\beta^\alpha x_k^{(\beta)} ;$$

la matrice (a_i^k) est celle qui indique comment l'opération s de G transforme entre elles les composantes d'un des tenseurs $x^{(\alpha)}$ et la matrice (b_β^α) est celle qui indique comment l'opération t de G′ transforme entre eux les h tenseurs $x^{(1)}, x^{(2)}, \cdots, x^{(h)}$ irréductibles par rapport à G. Les matrices (a_i^k) définissent une représentation linéaire irréductible de G

$$x_i \to a_i^k x_k ;$$

les matrices (b_β^α) définissent une représentation de G′

$$x^{(\alpha)} \to b_\beta^\alpha x^{(\beta)}.$$

On voit ainsi que les hr variables $x_i^{(\alpha)}$ se transforment linéairement entre elles par le groupe $\mathcal{G}$; la représentation linéaire considérée de $\mathcal{G}$ se décomposera donc en autant de représentations irréductibles qu'il y a dans la représentation induite de G′ de parties irréductibles non équivalentes. On voit de plus que les hr variables x_i^{α} se transforment comme les produits $x_i x^{(\alpha)}$ des com-

posantes d'une représentation irréductible de G par les composantes d'une représentation de G'. Cette dernière étant complètement réductible, la représentation $x_i\, x^{(\alpha)}$ sera par cela même complètement réductible, chaque partie étant le produit de la représentation irréductible de G par une représentation irréductible de G', d'où le

Théorème. — *Tout tenseur irréductible relatif au produit direct* G $\times$ G' *de deux groupes* G *et* G' *est équivalent au produit d'un tenseur irréductible relatif à* G *par un tenseur irréductible relatif à* G' ; *si le théorème de complète réductibilité est valable pour* G *et pour* G', *il l'est aussi pour leur produit direct.*

84. Applications au groupe des rotations complexes. — Dans le cas qui nous occupe, tout tenseur irréductible analytique du produit direct de deux groupes de rotations complexes est équivalent au produit du tenseur $\mathfrak{D}_{\frac{p}{2}}$ par le tenseur $\mathfrak{D}_{\frac{q}{2}}$, le premier étant censé soumis aux rotations de paramètres α, β, γ, le second aux rotations de paramètres indépendants $\bar{\alpha}, \bar{\beta}, \bar{\gamma}$. Si on revient maintenant au groupe des rotations complexes, on aura le même tenseur, *mais où on regardera* $\bar{\alpha}$, $\bar{\beta}$, $\bar{\gamma}$, *comme les quantités complexes conjuguées de* α, β, γ. D'où le théorème :

Tout tenseur irréductible du groupe des rotations complexes est équivalent au tenseur dont les composantes sont les monomes en $\xi_0, \xi_1, \bar{\xi}_0, \bar{\xi}_1$, *de degré* p *en* ξ_0, ξ_1 *et* q *en* $\bar{\xi}_0, \bar{\xi}_1$, *en désignant par* ξ_0, ξ_1 *un spineur arbitraire et* $\bar{\xi}_0, \bar{\xi}_1$ *son conjugué.*

On peut désigner par $\mathfrak{D}_{\frac{p}{2}, \frac{q}{2}}$ la représentation correspondante et on peut prendre comme forme génératrice le polynome

$$(a\xi_0 + b\xi_1)^p (c\bar{\xi}_0 + d\bar{\xi}_1)^q$$

avec 4 paramètres arbitraires a, b, c, d. Le degré de cette représentation est $(p+1)(q+1)$.

Nous retrouverons plus loin ces représentations. Signalons simplement le cas $p = q = 1$ qui donne un tenseur de degré 4 de composantes $\xi_0\,\bar{\xi}_0, \xi_0\,\bar{\xi}_1, \xi_1\,\bar{\xi}_0, \xi_1\,\bar{\xi}_1$: ces composantes sont liées par une relation quadratique. Pour $p = q$ on a un tenseur *réel*, ce

qui veut dire que ses composantes peuvent être choisies de manière que par toute rotation complexe, elles subissent une substitution linéaire à coefficients réels. Exemple : les 9 produits $x_i \bar{x}_j$ des composantes d'un vecteur par les composantes du vecteur complexe conjugué.

IV. — UNIVALENCE ET BIVALENCE.

85. L'univalence des représentations li éaires du groupe unimodulaire de deux variables. — La détermination qui a été faite des représentations linéaires irréductibles du groupe des rotations de l'espace euclidien complexe, du groupe des rotations de l'espace euclidien réel et du groupe des rotations propres de l'espace pseudo-euclidien réel nous a fourni des représentations univalentes et des représentations bivalentes. Pour les deux derniers groupes les représentations bivalentes sont les $\mathfrak{D}_{\frac{p}{2}}$, où p est impair ; pour le premier groupe, ce sont les représentations $\mathfrak{D}_{\frac{p}{2}, \frac{q}{2}}$ pour $p + q$ impair. En réalité toutes les représentations obtenues sont aussi des représentations du groupe correspondant des spineurs, mais à ce titre elles sont univalentes. Nous arrivons donc au théorème suivant :

THÉORÈME. — *Les trois groupes des substitutions linéaires unimodulaires à deux variables qui sont respectivement* : 1° *complexes*, 2° *unitaires*, 3° *réelles, n'admettent aucune représentation linéaire multivalente.*

Dans le cas unitaire on peut en donner une raison *a priori* de nature topologique. Toute matrice unitaire unimodulaire d'ordre 2 est de la forme $\begin{pmatrix} a & -b \\ \bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix}$, avec $a\bar{a} + b\bar{b} = 1$. En posant

$$a = a_1 + ia_2, \qquad b = a_3 + ia_4,$$

on voit que l'espace du groupe unitaire unimodulaire est la variété dont chaque point est défini par 4 nombres réels a_1, a_2, a_3, a_4 dont la somme des carrés est égale à 1 ; c'est *l'espace sphérique à trois dimensions* (hypersphère de rayon 1 de l'espace euclidien à 4 dimensions). Cet espace est simplement connexe en se sens que tout contour fermé peut y être réduit à un point par déformation conti-

nue : on le voit le plus facilement en transformant l'hypersphère dans l'espace euclidien à 3 dimensions par une inversion ayant son pôle en un point de cette hypersphère (projection stéréographique) : elle est ainsi transformée dans un espace euclidien à trois dimensions (fermé par un point à l'infini). On peut alors démontrer que si le groupe unitaire unimodulaire avait une représentation multivalente, en suivant par continuité la matrice de cette représentation lorsqu'on se déplace dans l'espace du groupe en partant d'un point origine et en y revenant par un contour convenablement choisi, on partirait de la matrice unité pour aboutir à une matrice différente. En déformant par continuité ce contour on devrait toujours aboutir à la même matrice finale, mais comme on peut le déformer de manière à le réduire au point origine, on arrive à une contradiction.

86. Les représentations linéaires du groupe homographique réel d'une variable. — L'espace des matrices unimodulaires complexes est aussi simplement connexe, comme on peut le démontrer : cela explique aussi la non existence de représentations multivalentes du groupe unimodulaire complexe. Mais il n'en est plus de même pour l'espace des matrices unimodulaires *réelles* ; il n'est pas simplement connexe, car au point de vue topologique il est homéomorphe à l'intérieur d'un tore ; *on ne peut donc pas donner pour ce groupe de raison topologique a priori de la non existence de représentations linéaires multivalentes.* Remarquons du reste que les représentations linéaires de ce groupe sont aussi des représentations linéaires du groupe homographique direct d'une variable réelle z :

$$z' = \frac{az + b}{cz + d} \qquad (ad - bc > 0) ;$$

à une opération de ce groupe correspondent deux substitutions linéaires unimodulaires réelles à deux variables. Le groupe homographique admet donc des représentations linéaires univalentes et des représentations bivalentes, mais *pas de représentations multivalentes d'un ordre plus élevé que* 2.

On peut déduire de là l'existence de groupes qui n'admettent aucune représentation linéaire *fidèle*, c'est-à-dire telle qu'il y ait

correspondance biunivoque entre les opérations du groupe et les matrices de la représentation. Partons de l'équation

$$\operatorname{tg} x' = \frac{a \operatorname{tg} x + b}{c \operatorname{tg} x + d} \qquad (ad - bc > 0).$$

Cette équation en x' admet une infinité de solutions : choisissons pour $x = 0$ une des déterminations de arc tg $\frac{b}{d}$ et suivons-la par continuité quand x varie soit de 0 à $+\infty$, soit de 0 à $-\infty$. Comme on a

$$\frac{dx'}{dx} = \frac{ad - bc}{(a \sin x + b \cos x)^2 + (c \sin x + d \cos x)^2},$$

on voit que $\frac{dx'}{dx}$ reste compris entre deux nombres positifs fixes : par suite quand x varie de 0 à $+\infty$, x' croît de arc tg $\frac{b}{d}$ à $+\infty$, et quand x varie de 0 à $-\infty$, x' décroît de arc tg $\frac{b}{d}$ à $-\infty$. Nous définissons donc ainsi une transformation sur la droite réelle indéfinie. L'ensemble de ces transformations forme évidemment un groupe, et *ce groupe est continu.* Il suffit pour s'assurer de ce dernier point de montrer qu'on peut passer par continuité de la transformation de paramètres a, b, c, d correspondant à une détermination de arc tg $\frac{b}{d}$ à la transformation de mêmes paramètres correspondant à une autre détermination de arc tg $\frac{b}{d}$, par exemple à celle qui en diffère de π ou de $-\pi$. Pour cela regardons a, b, c, d comme les coordonnées homogènes d'un point dans un espace à trois dimensions : à chaque transformation homographique correspond un point situé dans la région positive de l'espace limitée par la quadrique réglée $ad - bc = 0$. Menons par le point (a, b, c, d) considéré une droite ne coupant pas la quadrique et prenons sur cette droite un point particulier a_0, b_0, c_0, d_0 ; considérons enfin la transformation homographique de paramètres $a + \lambda a_0$, $b + \lambda b_0$, $c + \lambda c_0$, $d + \lambda d_0$, où λ varie par continuité de 0 à $+\infty$, puis de $-\infty$ à 0 ; en suivant par continuité la valeur de arc tg $\frac{b + \lambda b_0}{d + \lambda d_0}$ à partir de la valeur initiale choisie, on arrivera par continuité soit à cette valeur augmentée de π, soit à cette valeur augmentée de $-\pi$ (cela dépend du sens dans lequel on fait varier λ). On aura donc, dans la famille des transformations en x considérées, une

suite continue de transformations dans laquelle les transformations initiale et finale correspondent aux paramètres donnés a, b, c, d, mais avec des valeurs de arc tg $\frac{b}{d}$ différant entre elles de π.

C. Q. F. D.

Cela posé le groupe continu ainsi défini de transformations sur la variable x est tel qu'à une transformation en tg$x$ du groupe homographique correspondent une infinité de transformations en x. Un tel groupe ne peut donc admettre de représentation linéaire fidèle. Sa variété est simplement connexe. Ce résultat est d'autant plus remarquable que d'après un théorème de H. Weyl et Peter tout groupe clos (compact) admet toujours une représentation linéaire fidèle.

On aurait d'autres groupes recouvrant un nombre fini de fois le groupe homographique et n'admettant aucune représentation linéaire fidèle en considérant par exemple l'équation

$$\operatorname{tg} nx' = \frac{a \operatorname{tg} nx + b}{c \operatorname{tg} nx + d} \qquad (n \text{ entier})$$

regardée comme une équation exprimant $z' = \operatorname{tg} x'$ en fonction de $z = \operatorname{tg} x$. Cette équation est de degré n et admet n solutions dont chacune fournit une transformation sur la droite projective réelle z (z prend toutes les valeurs y compris ∞). Toutes ces transformations forment un groupe continu qui recouvre n fois le groupe homographique d'une variable. Il n'admet une représentation linéaire fidèle que si $n = 1$ ou $n = 2$.

V. — REPRÉSENTATIONS LINÉAIRES DU GROUPE DES ROTATIONS ET DES RETOURNEMENTS.

87. Position du problème. — Nous nous proposons de déterminer toutes les représentations linéaires

1° du groupe des rotations et des retournements complexes ;

2° du groupe des rotations et des retournements de l'espace euclidien réel ;

3° du groupe des rotations propres et impropres du pseudo-espace euclidien réel ;

4° du groupe des rotations propres et des retournements propres de ce même espace ;

5° du groupe des rotations propres et des retournements impropres de ce même espace.

Dans chacun de ces cas nous avons un groupe $\mathcal{G}$ formé de deux familles continues G et G′ dont la première forme un groupe continu ; nous écrirons $\mathcal{G} = G + G'$. Nous connaissons dans chaque cas toutes les représentations linéaires de G et nous savons que le théorème de complète réductibilité est valable. Enfin pour chaque représentation linéaire de G nous connaissons une représentation linéaire de $\mathcal{G}$ fournissant pour G la représentation donnée.

88. Cas des représentations irréductibles induisant dans le groupe des rotations une représentation irréductible. — Nous allons d'abord envisager les représentations irréductibles de $\mathcal{G}$ fournissant pour G une représentation irréductible et montrer qu'il en existe une autre non équivalente à la première et une seule, fournissant pour G la même représentation linéaire. Soit en effet T la matrice qui correspond à une opération t de G′ ; soit d'autre part s une opération infinitésimale de G et R la matrice correspondante ; à l'opération tst^{-1} de G correspondra la matrice TRT^{-1}. S'il existe une autre représentation faisant correspondre à t la matrice T′, à l'opération infinitésimale tst^{-1} correspondra $T'RT'^{-1}$; on doit donc avoir, quelle que soit la matrice R de la représentation considérée de G,

$$TRT^{-1} = T'RT'^{-1},$$

ou

$$T^{-1}T'R = RT^{-1}T' ;$$

la matrice $T^{-1}T'$ commutant avec toutes les matrices R d'une représentation irréductible est un scalaire m (n° **32**) et l'on a

$$T' = mT ;$$

le coefficient m est du reste indépendant de t, comme on le voit en remarquant que toute autre opération de G′ est de la forme st ; la considération de l'opération t^{-1}, qui appartient à G′, montre alors que $m^2 = 1$, $m = -1$. Du reste le choix de $-T$ à la place de T donne effectivement une nouvelle représentation linéaire de $\mathcal{G}$.

Ces deux représentations ne sont pas équivalentes, car si elles l'étaient, il existerait une matrice fixe C telle qu'on ait

$$CSC^{-1} = S, \qquad CTC^{-1} = -T ;$$

la première relation montre que C est un scalaire, ce qui est en contradiction avec la seconde.

Théorème. — *Etant donnée une représentation linéaire irréductible du groupe* G, *ou bien il n'existe pas de représentation du groupe* $\mathcal{G}$ *induisant cette représentation donnée de* G, *ou bien il en existe deux non équivalentes.*

89. Le cas opposé. — Considérons maintenant une représentation irréductible de $\mathcal{G}$ induisant une représentation réductible de G. Soient $x_1, x_2, \ldots, x_r$ les composantes d'une partie irréductible de cette dernière représentation. Soit t une opération de G′ et supposons que l'opération t transforme respectivement $x_1, x_2, \cdots, x_r$ en r combinaisons linéaires des variables de la représentation, combinaisons que nous appellerons $y_1, y_2, \ldots, y_r$ (si le groupe est multivalent, nous considérerons l'une des substitutions linéaires qui correspondent à t). Soit s une opération infinitésimale de G et posons $s' = tst^{-1}$, d'où $ts = s't$. Si nous appliquons à la variable x_i l'opération $s't$ nous obtenons $b_i^k\, y_k$, en désignant par b_i^j les éléments de la matrice R′ qui opère sur les x_i ; d'autre part en appliquant à x_i l'opération ts, nous obtenons le résultat de la matrice R appliquée aux y_i ; par suite

Si l'opération s' *transforme* x_i *en* $b_i^k\, x_k$, *l'opération* $s = t^{-1}s't$ *transforme* y_i *en* $b_i^k\, y_k$.

On voit ainsi que les quantités $y_1, y_2, \ldots, y_r$ fournissent une représentation linéaire, évidemment irréductible, de G. Du reste si on fait varier t d'une manière continue dans le groupe G′, les x_i sont transformés dans des combinaisons linéaires de $y_1, y_2, \ldots, y_r$. L'inverse t^{-1} de t appartenant à G′, il résulte de là que toutes les opérations de G′ transforment $y_1, y_2, \ldots, y_r$ dans des combinaisons linéaires de $x_1, x_2, \ldots, x_r$.

Cela posé deux cas sont possibles :

A. *Les deux représentations linéaires de* G *fournies par les variables* x_i *et les variables* y_i *sont équivalentes.* Nous pouvons supposer alors, en effectuant une substitution linéaire préalable sur les y_i, que les y_i sont transformées de la même manière que les x_i par toute opération de G. Soient alors

$$x' = \mathrm{T}y, \qquad y' = \mathrm{U}x$$

les équations de la substitution linéaire correspondant à l'opération t de G′ et soit R la matrice opérant tant sur les x_i que sur les y_i qui correspond à l'opération infinitésimale s de G. La

matrice correspondant à tst^{-1} sera TRT^{-1} opérant sur les x_i et URU^{-1} opérant sur les y_i ; on aura donc

$$TRT^{-1} = URU^{-1},$$

d'où $U = mT$. Mais alors les variables $y_i + \sqrt{m}x_i$ sont transformées entre elles par les opérations de G′ puisque l'on a

$$y' + \sqrt{m}x' = \sqrt{m}T(y + \sqrt{m}x),$$

et de même

$$y' - \sqrt{m}x' = -\sqrt{m}T(y - \sqrt{m}x).$$

Il y a certainement des relations linéaires identiques entre les x_i et les y_i, sans quoi la représentation considérée de $\mathcal{G}$ ne serait pas irréductible. Comme les deux représentations irréductibles de $\mathcal{G}$ correspondant aux matrices $\sqrt{m}T$ et $-\sqrt{m}T$ ne sont pas équivalentes, cela n'est possible que si toutes les variables $y_i + \sqrt{m}x_i$ sont nulles, ou si toutes les variables $y_i - \sqrt{m}x_i$ sont nulles. Dans l'un et l'autre cas, contrairement à l'hypothèse, la représentation considérée de $\mathcal{G}$ induit une représentation irréductible de G.

B. *Les deux représentations linéaires de* G *fournies par les variables x_i et les variables y_i sont non équivalentes*. Ce cas est donc le seul qui peut se présenter. Les variables x_i et y_i sont linéairement indépendantes, sans quoi toutes les variables x_i ou toutes les variables y_i seraient nulles, ce qui est absurde. Elles constituent toutes les variables de la représentation considérée de $\mathcal{G}$. Nous allons voir que toutes les représentations irréductibles de $\mathcal{G}$ qui induisent dans G deux représentations irréductibles données non équivalentes sont toutes équivalentes entre elles. En effet soit dans une première représentation de $\mathcal{G}$

$$x' = Uy, \qquad y' = Vx$$

la substitution linéaire (ou l'une des substitution linéaires) correspondant à l'opération t de G′, et soit

$$x' = U'y, \qquad y' = V'x$$

la substitution correspondante dans une seconde représentation. R étant la matrice qui opère sur les y_i par l'effet de l'opération infinitésimale s de G, on aura

$$URU^{-1} = U'RU'^{-1}, \qquad \text{d'où} \qquad U' = mU\,;$$

on aura de même $V' = nV$, les coefficients m et n étant des cons-

tantes. En considérant l'opération inverse, on constate que $n = \frac{1}{m}$. Mais alors dans les équations

$$x' = m\,\mathrm{U}y, \qquad y' = \frac{1}{m}\,\mathrm{V}x,$$

il suffit de remplacer x_i par mx_i et x'_i par mx'_i pour retrouver les équations de la première représentation, ce qui démontre la proposition.

THÉORÈME. — *S'il existe une représentation irréductible du groupe $\mathcal{G}$ induisant dans le groupe G une représentation réductible, cette dernière se décompose en deux parties irréductibles de même degré non équivalentes et toute autre représentation irréductible de $\mathcal{G}$ induisant dans* G *une représentation réductible équivalente est équivalente à la première.*

Il résulte des considérations précédentes que toute opération de G′ transforme un tenseur irréductible déterminé de G en un autre tenseur irréductible bien déterminé. Si ce second tenseur est équivalent au premier, l'un quelconque d'entre eux fournit les composantes d'un ou plus exactement de deux tenseurs irréductibles non équivalents de $\mathcal{G}$. Si le tenseur donné et le tenseur transformé ne sont pas équivalents, l'ensemble des composantes de ces deux tenseurs fournit un tenseur irréductible et un seul de $\mathcal{G}$.

90. Applications.— Dans le cas du groupe des rotations et des retournements du groupe euclidien réel, ou du groupe des rotations et des retournements propres du groupe pseudo-euclidien, les tenseurs irréductibles de G sont les tenseurs $\mathfrak{D}_{\frac{p}{2}}$ de polynomes générateurs $(a\xi_0 + b\xi_1)^p$. La symétrie H_0 changeant ξ_0 en ξ_0 et ξ_1 en $-\xi_1$ conserve la composante $\xi_0{}^p$; le tenseur transformé par G′ est donc équivalent au tenseur considéré. La même conclusion subsiste s'il s'agit du groupe des rotations de l'espace pseudo-euclidien, ou encore du groupe des rotations propres et des retournements impropres.

En ce qui concerne le groupe des rotations complexes, le tenseur de polynome générateur

$$(a\xi_0 + b\xi_1)^p(c\bar{\xi}_0 + d\bar{\xi}_1)^q$$

est encore transformé en un tenseur équivalent par un retourne-

ment, la composante $\xi_0{}^p \, \bar{\xi}_0{}^q$ étant invariante par la symétrie H_0.

Par suite *dans tous les groupes envisagés nous voyons qu'à toute représentation linéaire irréductible du groupe* G *correspondent deux représentations irréductibles non équivalentes de* $\mathcal{G}$, *et il n'y a pas d'autres représentations irréductibles de* $\mathcal{G}$.

Par exemple au tenseur $(a\xi_0 + b\xi_1)^p \, (c\bar{\xi}_0 + d\bar{\xi}_1)^q$ correspondent pour $\mathcal{G}$ deux tenseurs irréductibles ; à l'opération $\xi'_0 = \xi_0$, $\xi'_1 = -\xi_1$ sur les spineurs correspondent pour le polynome générateur les deux polynomes transformés

$$(a\xi_0 - b\xi_1)^p(c\bar{\xi}_0 - d\bar{\xi}_1)^q \qquad \text{et} \qquad -(a\xi_0 - b\xi_1)^p(c\bar{\xi}_0 - d\bar{\xi}_1)^q.$$

91. Cas du groupe des rotations et des retournements de l'espace pseudo-euclidien réel. — Nous avons ici un groupe formé de quatre familles continues. Des raisonnements analogues aux précédents permettent de montrer *qu'à tout tenseur irréductible du groupe des rotations propres correspondent quatre tenseurs irréductibles non équivalents du groupe total, et ce sont les seuls tenseurs irréductibles de ce groupe.* Si dans l'une de ces représentations aux opérations s, t, u, v des quatre familles correspondent les matrices S, T, U, V, dans les trois autres il leur correspond respectivement

$$\begin{array}{llll} S, & T, & -U, & -V\,; \\ S, & -T, & U, & -V\,; \\ S, & -T, & -U, & V. \end{array}$$

Alors que dans l'espace euclidien réel proprement dit, il existe deux tenseurs distincts et deux seulement se comportant comme un vecteur par rapport au groupe des rotations, dans l'espace pseudo-euclidien il en existe quatre qui se comportent comme un vecteur par rapport au groupe des rotations propres.

Ajoutons enfin que, comme le montre un raisonnement facile, le théorème de complète réductibilité est valable pour les représentations linéaires du groupe $\mathcal{G} = G + G'$ si on le suppose valable pour celles du groupe G, ce qui est le cas dans les applications que nous venons de faire.

TABLE DES MATIÈRES

CHAPITRE IV.

Les représentations linéaires du groupe des rotations de E_3.

Saint-Amand (Cher). — Imprimerie R. BUSSIÈRE. — 4-7-1938.